



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
—ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837—

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ ΒΑΣΙΚΟΥ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι



Ευστάθιος Στυλιάρης
Αναπληρωτής Καθηγητής – Συντονιστής Εργαστηρίων Φυσικής Ι

Με την συνδρομή των: Α. Καραμπαρμπούνη, Κ.Ν. Παπανικόλα, Ν. Μαμαλούγκου



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
—ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837—

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ «Καίσαρ Δ. Αλεξόπουλος»

Διαδικτυακός Τόπος

Web: <http://physlab.phys.uoa.gr>

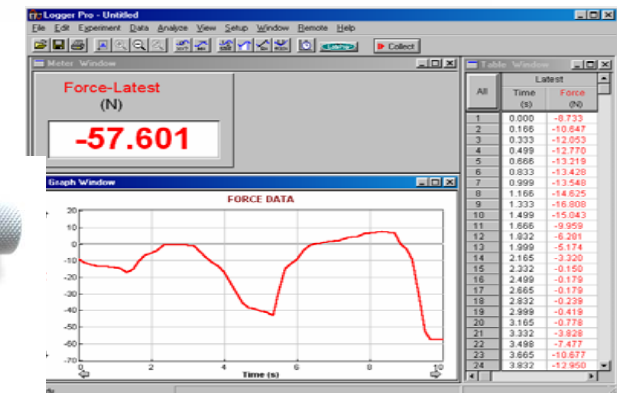
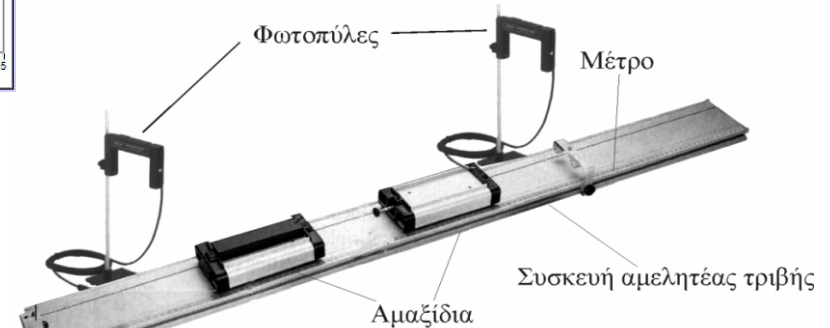
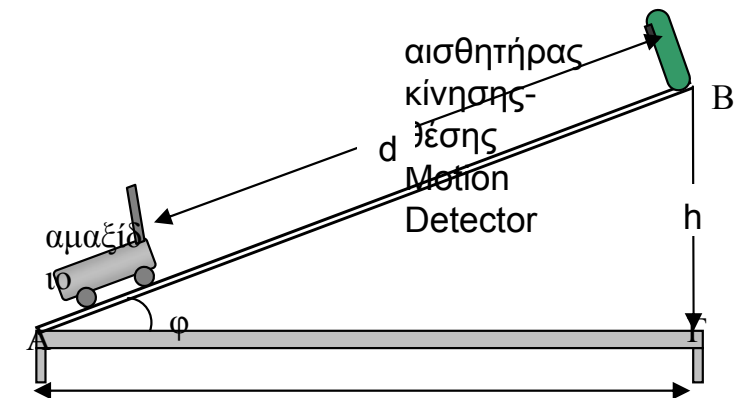
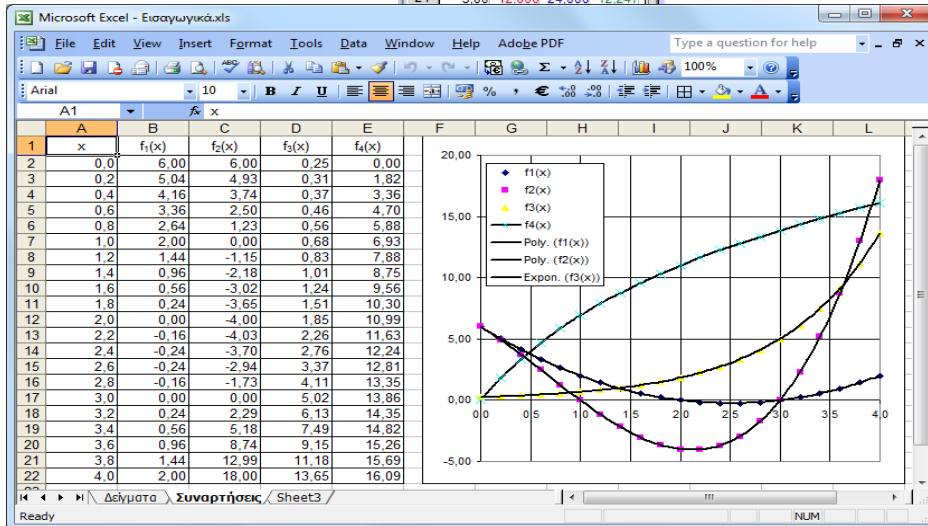
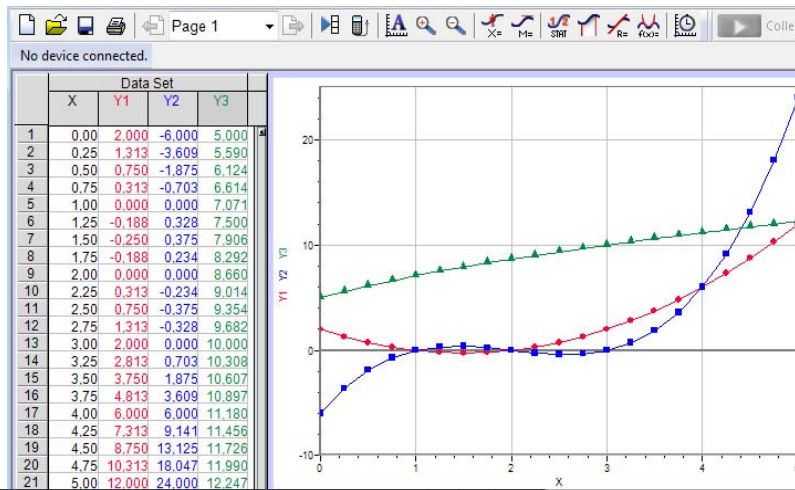
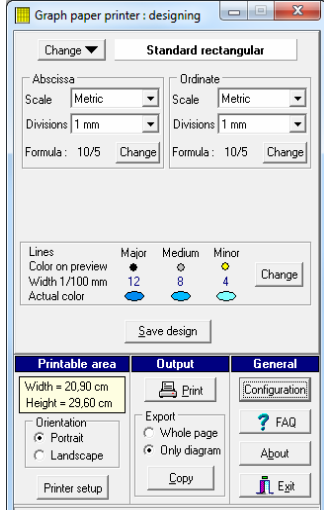
e-class: <http://eclass.uoa.gr/courses/PHYS157/>

Διευθυντής Εργαστηρίου
Αναπ. Καθηγητής Έκτορας Νισταζάκης

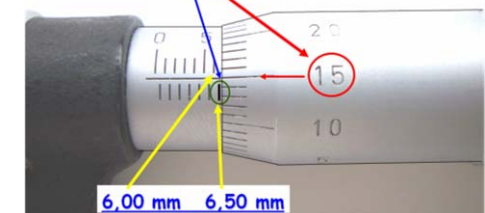
Συντονιστής Εργαστηρίων Φυσικής Ι
Ευστάθιος Στυλιάρης

stiliaris@phys.uoa.gr

Τηλέφωνο Γραφείου: 210 - 727 6885



$$(6.50 + 0.15) = 6.65 \text{ mm}$$



ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΔΙΑΛΕΞΕΩΝ

- Πειραματική Μέθοδος
- Μέτρηση και Πειραματική Αβεβαιότητα (Σφάλμα)
- Τύποι Σφαλμάτων: Στατιστικό & Συστηματικό Σφάλμα
- Διάδοση Σφαλμάτων
- Σύγκριση Θεωρίας & Πειράματος: Προσαρμογή Θεωρητικής Καμπύλης (Fit)
- Σχεδιασμός και Προετοιμασία Πειράματος
- Διεξαγωγή Μετρήσεων
- Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Διαδικασίες και Κανονισμοί του Εργαστηρίου Φυσικής

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Η Φυσική είναι πειραματική επιστήμη.

- Η γνώση μας για τον φυσικό κόσμο προέρχεται (όπως και για κάθε επιστήμη) από παρατήρηση ή από πείραμα.
- Απορρίπτουμε ή διευρύνουμε το ερμηνευτικό μας πλαίσιο (θεωρία ή πρότυπο / μοντέλο ώστε να συνάδει με τα πειραματικά δεδομένα)

Παρατήρηση: Η καταγραφή μεγεθών που αφορούν φαινόμενα μη ελεγχόμενα και συνήθως μη επαναλήψιμα (λ.χ. μια έκρηξη Supernova, κάποιος σεισμός).

Πείραμα: Η καταγραφή μεγεθών που αφορούν φαινόμενα ελεγχόμενα και επαναλήψιμα (π.χ. η μέτρηση της θερμικής αγωγιμότητας κάποιου υλικού, η σκέδαση σωματίων από κάποιο πυρήνα ...)

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

Πότε και με ποια βεβαιότητα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι κάποιο πειραματικό αποτέλεσμα απορρίπτει ή επιβεβαιώνει κάποια θεωρητική πρόβλεψη;

Θεωρητική Πρόβλεψη: Ισοδύναμο με συγκεκριμένη πρόταση ή αριθμητικό αποτέλεσμα που μπορεί όμως να απορριφθεί πειραματικά.

Πειραματικό αποτέλεσμα: Ισοδύναμο με αποτέλεσμα μέτρησης. **Πάντα** χαρακτηρίζεται από κάποια **αβεβαιότητα** (σφάλμα).

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ

Θεωρητική Πρόβλεψη: Ισοδύναμο με συγκεκριμένη πρόταση ή αριθμητικό αποτέλεσμα που μπορεί να απορριφθεί πειραματικά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Το ηλεκτρόνιο είναι σταθερό (στο χρόνο) σωματίο.
- Το πρωτόνιο έχει χρόνο ημιζωής 4×10^{34} έτη.
- Σώματα μαζών M και m έλκονται με δύναμη: $|\vec{F}| = G \frac{Mm}{R^2}$
- Η περίοδος (T) συστήματος ελατηρίου (K) και μάζας m είναι:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

- Η ακτίνα του πυρήνα του μολύβδου είναι: $R = 5.82 \times 10^{-15} \text{ m}$

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

Πειραματικό αποτέλεσμα: Ισοδύναμο με αποτέλεσμα μέτρησης. **Πάντα** χαρακτηρίζεται από κάποια **αβεβαιότητα (σφάλμα)**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Το πρωτόνιο έχει χρόνο ημιζωής **μεγαλύτερο** από: 4.6×10^{33} έτη (90% cf*)
- Η ακτίνα του πυρήνα του μολύβδου είναι: $R = (5.4989 \pm 0.0007) \times 10^{-15} \text{ m}$

Θεωρητική Πρόβλεψη $R = 5.82 \times 10^{-15} \text{ m}$

*confidence level = επίπεδο εμπιστοσύνης

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ (Κλασική Φυσική)

- Αποτέλεσμα ανεξάρτητο των **οργάνων μέτρησης**
- Αποτέλεσμα ανεξάρτητο του **παρατηρητή**
- Να υπάρχει **επαναληψιμότητα**

Παράγοντες που επηρεάζουν

- Περιβάλλον και συνθήκες μέτρησης
- Όργανα Μέτρησης: **Ακρίβεια** και **Βαθμονόμηση**

Επανερχόμενοι στο προηγούμενο ερώτημα: Πώς και με ποια βεβαιότητα μπορούμε από τα πειραματικά δεδομένα να επιβεβαιώσουμε ή να απορρίψουμε μια θεωρητική πρόβλεψη;

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Πειραματικό αποτέλεσμα: Ισοδύναμο με αποτέλεσμα μέτρησης.
Πάντα χαρακτηρίζεται από κάποια αβεβαιότητα ή σφάλμα.

$$(\text{τιμή}) \pm (\text{σφάλμα} / \text{αβεβαιότητα})$$

Ή ακόμη καλύτερα

$$(\text{τιμή}) \pm (\text{στατιστικό σφάλμα}) \pm (\text{συστηματικό σφάλμα})$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Η μάζα του ηλεκτρονίου είναι:

$$(0.51099906 \pm 0.00000015) \text{ MeV}$$

Η παγκόσμια σταθερά βαρύτητας είναι:

$$G = (6.673 \pm 0.011) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΟΡΓΑΝΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΙΣΘΗΤΗΡΕΣ

Ακρίβεια

Χαρακτηριστικό του οργάνου και της τεχνολογίας στην οποία βασίζεται.

Βαθμονόμηση

Μας οδηγεί στην ανάγκη αναγωγής των μετρήσεων μας σε σύγκριση με κάποια γνωστά (πρότυπα) μεγέθη.

Καταγραφή

- Παραδοσιακά (ο άνθρωπος σαν όργανο καταγραφής).
- Απευθείας σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Τότε τα όργανα μέτρησης αποκαλούνται «**αισθητήρες**».

Πότε υπεισέρχεται στατιστική αβεβαιότητα σε μία μέτρηση φυσικού μεγέθους;

1. Σε φαινόμενα όπου το ίδιο το σύστημα χαρακτηρίζεται από διακυμάνσεις:

- Ο χρόνος ημιζωής ραδιενεργού πυρήνα
- Η διακύμανση της μέσης θερμοκρασίας κάποια συγκεκριμένη μέρα του χρόνου

2. Όπου η «ανάγνωση» του οργάνου εισάγει πολυπλοκότητα και αστάθμητους (χαοτικής συμπεριφοράς) παράγοντες:

- Η παρουσία θορύβου στο σήμα (λ.χ. σε ηλεκτρονικά όργανα)
- Η διακύμανση στον χρόνο της αντίδρασης του παρατηρητή

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Τι καθορίζει την πειραματική αβεβαιότητα σε μία μέτρηση φυσικού μεγέθους;

- Η ακρίβεια του οργάνου μέτρησης
- Η βαθμονόμηση του οργάνου μέτρησης
- Ο μη απόλυτος έλεγχος (ή γνώση) των πειραματικών συνθηκών

Η πειραματική αυτή αβεβαιότητα αναφέρεται ως «συστηματική».

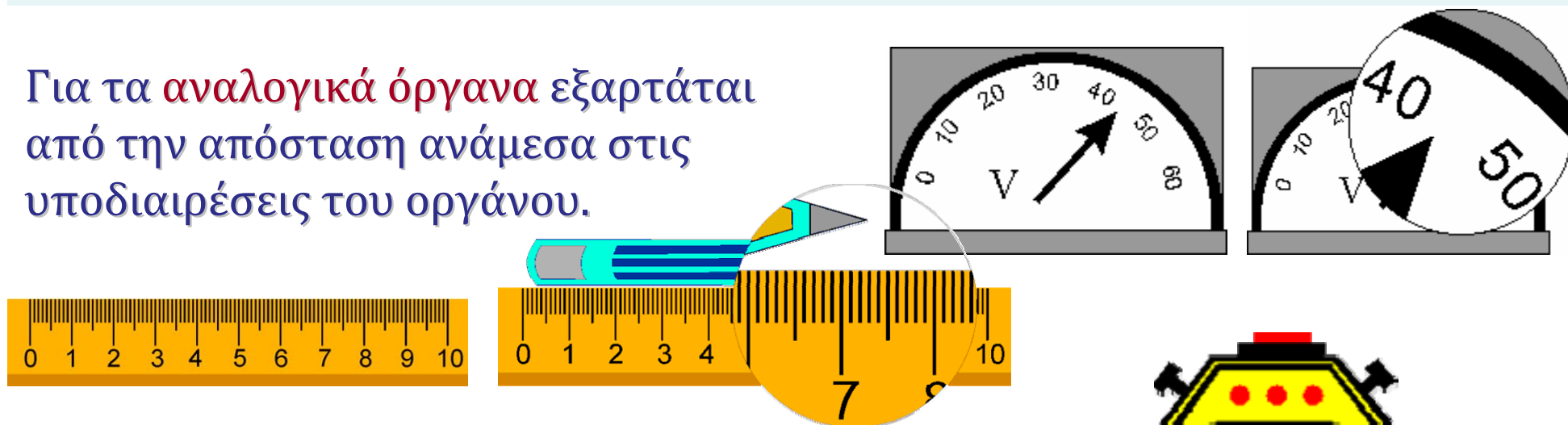
Όσες φορές και να επαναλάβουμε μια τέτοια μέτρηση δεν είναι δυνατό να ξεπεράσουμε τους περιορισμούς αυτούς. Απλά επαναλαμβάνουμε το ίδιο σφάλμα.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΤΟ ΣΦΑΛΜΑ ΑΝΑΓΝΩΣΗΣ ΩΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Τι καθορίζει το σφάλμα ανάγνωσης ενός οργάνου;

Για τα **αναλογικά όργανα** εξαρτάται από την απόσταση ανάμεσα στις υποδιαίρεσεις του οργάνου.



Για τα **ψηφιακά όργανα** συνήθως είναι το μισό του τελευταίου ψηφίου.



Ακρίβεια οργάνου είναι η αβεβαιότητα που προκύπτει λόγω της κατασκευής του οργάνου και συνήθως δίδεται από τον κατασκευαστή.

Κατά κανόνα το σφάλμα οργάνου είναι μικρότερο από το σφάλμα ανάγνωσης.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΤΡΟΠΟΣ ΓΡΑΦΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

(τιμή $\pm$ αβεβαιότητα)

$$G \pm \delta G = (6.673 \pm 0.011) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

τιμή (αβεβαιότητα)

$$G = 6.673 (11) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

$$\eta = \frac{\delta \bar{x}}{\bar{x}}$$

Απόλυτος αριθμός που μπορεί να εκφραστεί και ποσοστιαία.

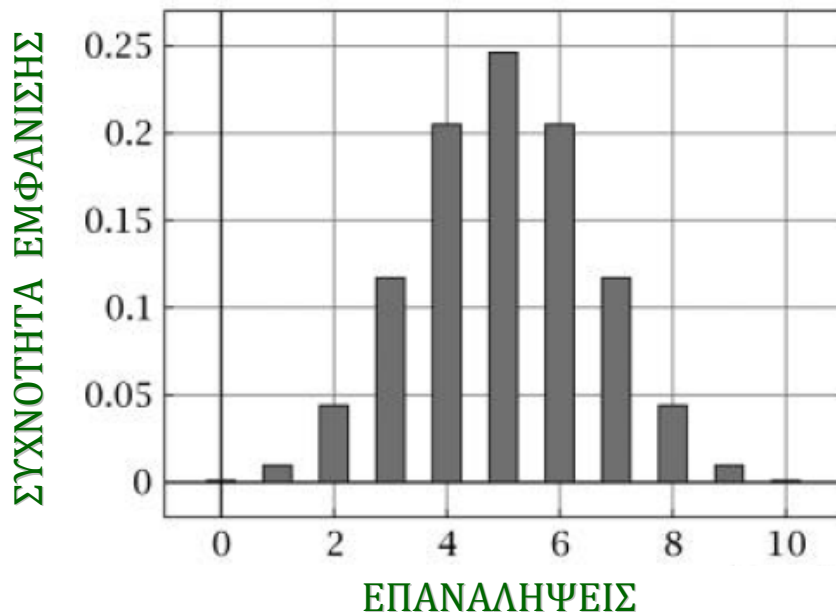
$$\frac{\delta G}{G} = 0.00165 \quad \text{ή} \quad \frac{\delta G}{G} = 0.165 \%$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Παραδείγματα διακριτών τιμών

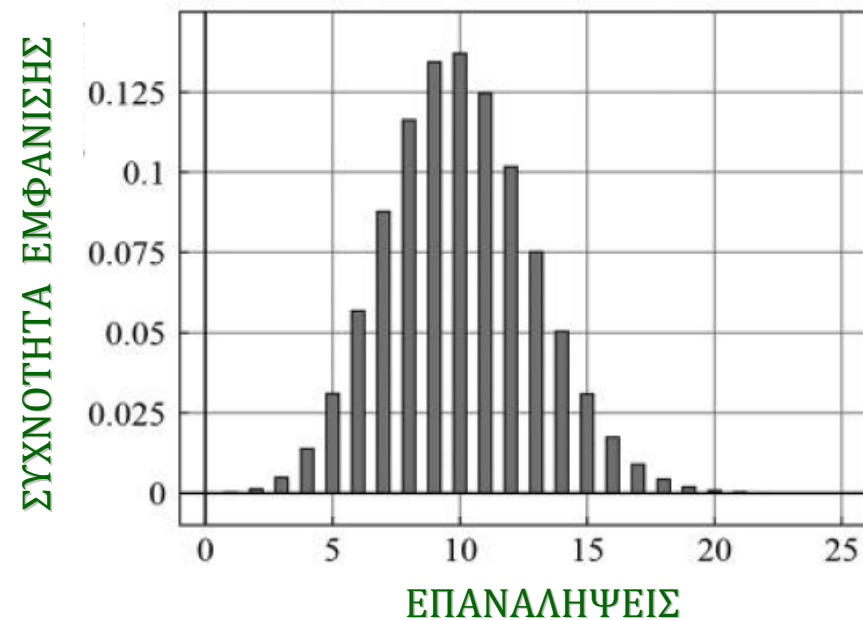
Ρίψη ενός νομίσματος



Πείραμα

Πόσες φορές έρχεται «κεφαλή»
στις 10 ρίψεις

Ρίψη ενός ζαριού



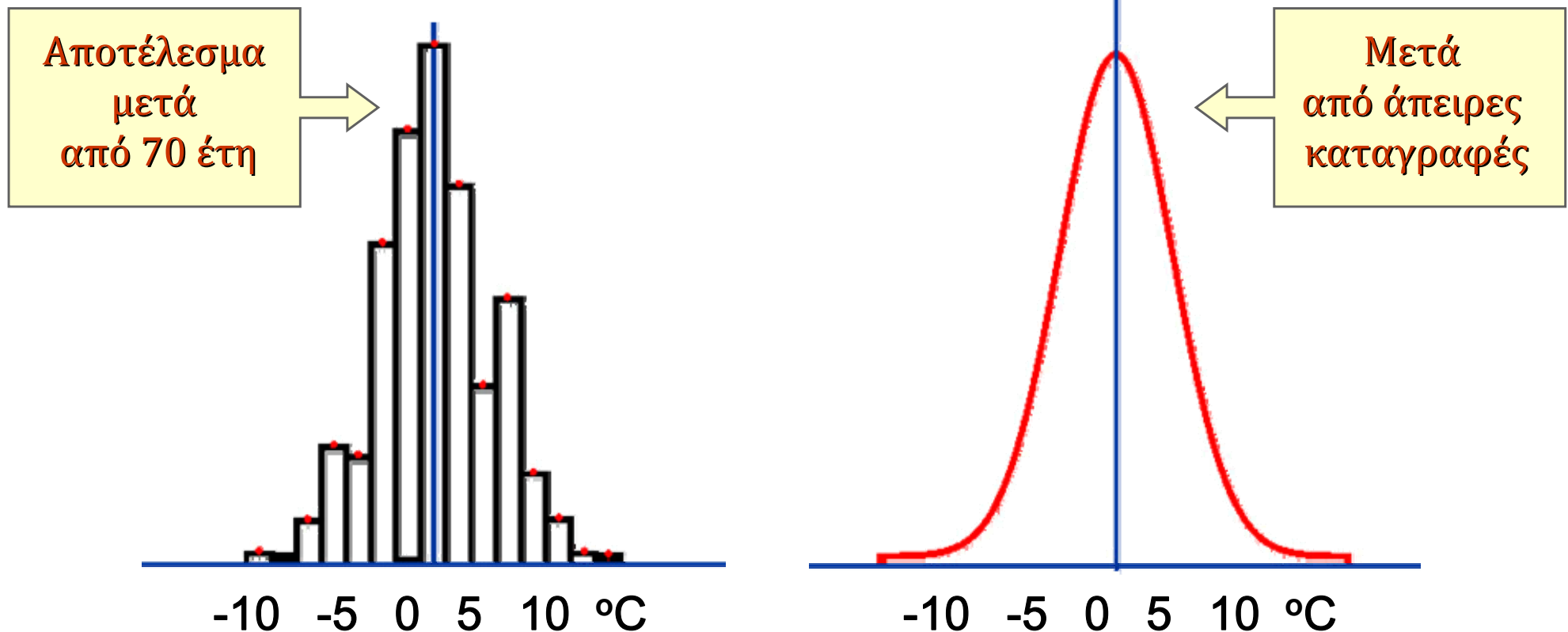
Πείραμα

Πόσες φορές έρχεται «εξάρα»
στις 60 ρίψεις

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Παράδειγμα συνεχούς κατανομής: Καταγράφουμε τη μέση θερμοκρασία ενός τόπου σε συγκεκριμένη ημερομηνία για μια σειρά ετών

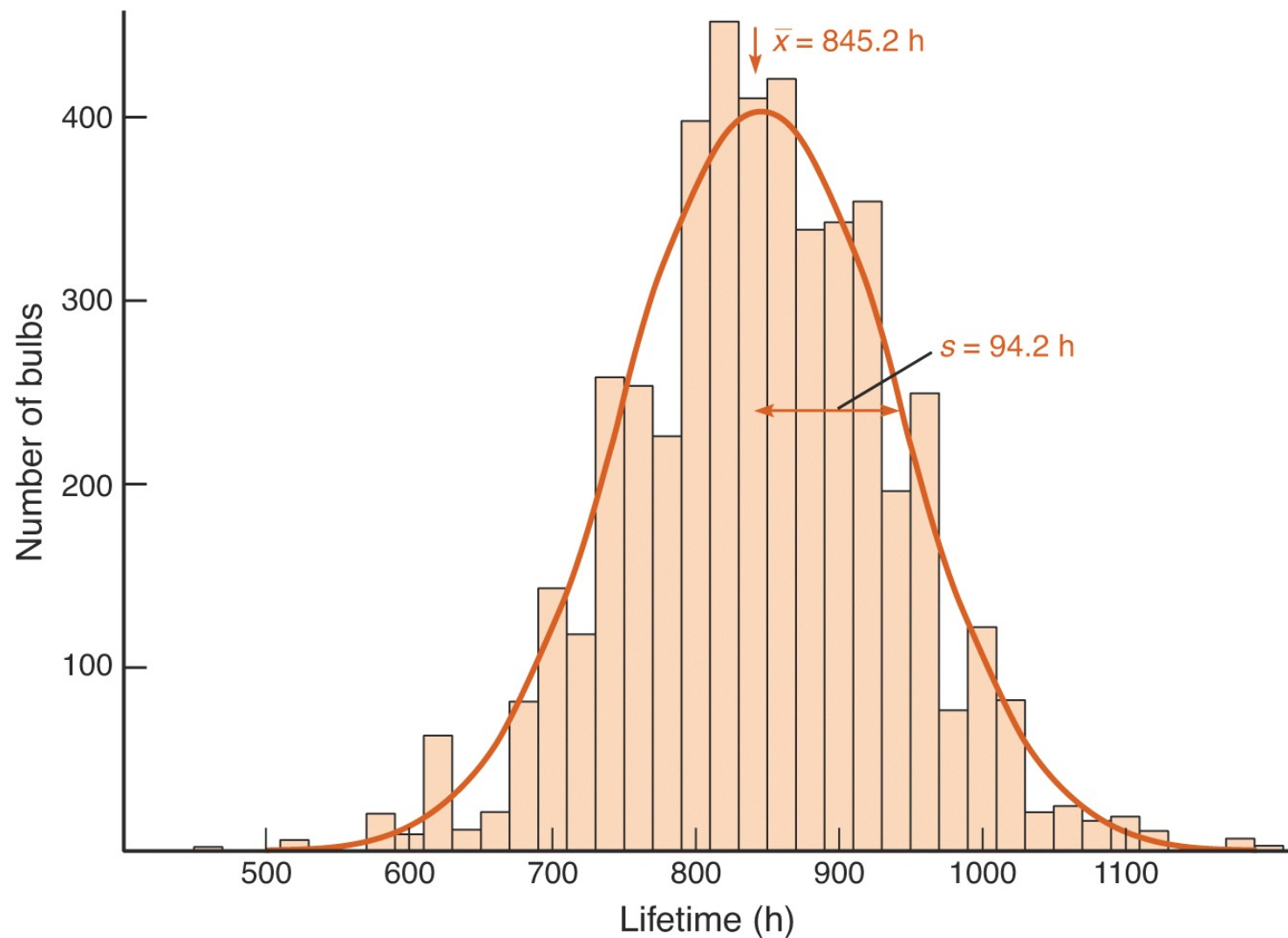


Σύμφωνα με την στατιστική θεωρία, αν το φαινόμενο είναι πραγματικά **τυχαίο**, η οριακή κατανομή (μετά από άπειρες μετρήσεις του φαινομένου) που θα προκύψει θα είναι μια **κατανομή Gauss** (κανονική κατανομή).

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

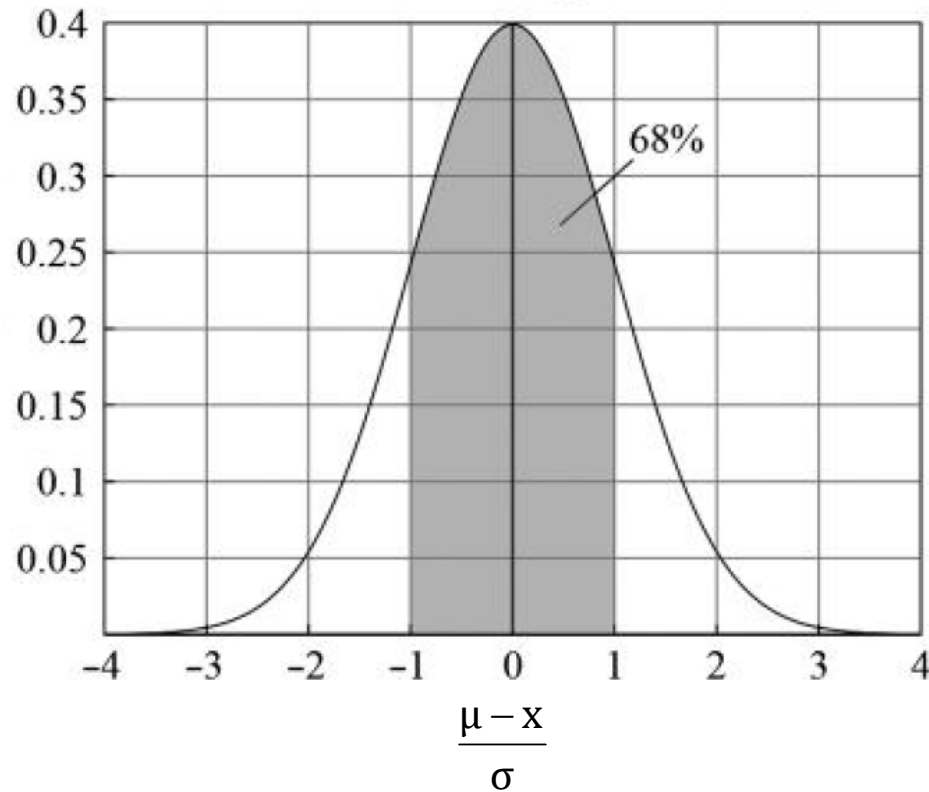
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

Χρόνος ζωής λαμπτήρων πυρακτώσεως



ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (Gauss)



Η ποσότητα $(\mu \pm \sigma)$ μας υποδεικνύει ότι η πιθανότητα μια μέτρηση να βρίσκεται στο διάστημα αυτό είναι **68.3 %**.

Η ποσότητα $(\mu \pm 2\sigma)$ μας υποδεικνύει ότι η πιθανότητα μια μέτρηση να βρίσκεται στο διάστημα αυτό είναι **95.5 %**.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}}$$

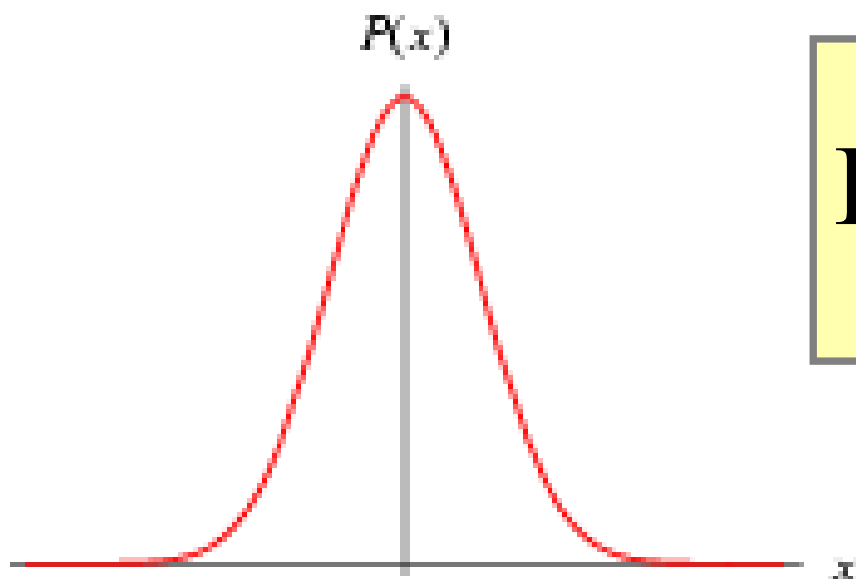
$(\mu \pm 1\sigma)$: 68.30 %

$(\mu \pm 2\sigma)$: 95.45 %

$(\mu \pm 3\sigma)$: 99.73 %

$(\mu \pm 4\sigma)$: 99.99 %

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ



Κατανομή Gauss

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1$$

μ : μέση τιμή

$$\mu = \bar{x} = \langle x \rangle$$

σ : τυπική ή μέση τετραγωνική απόκλιση

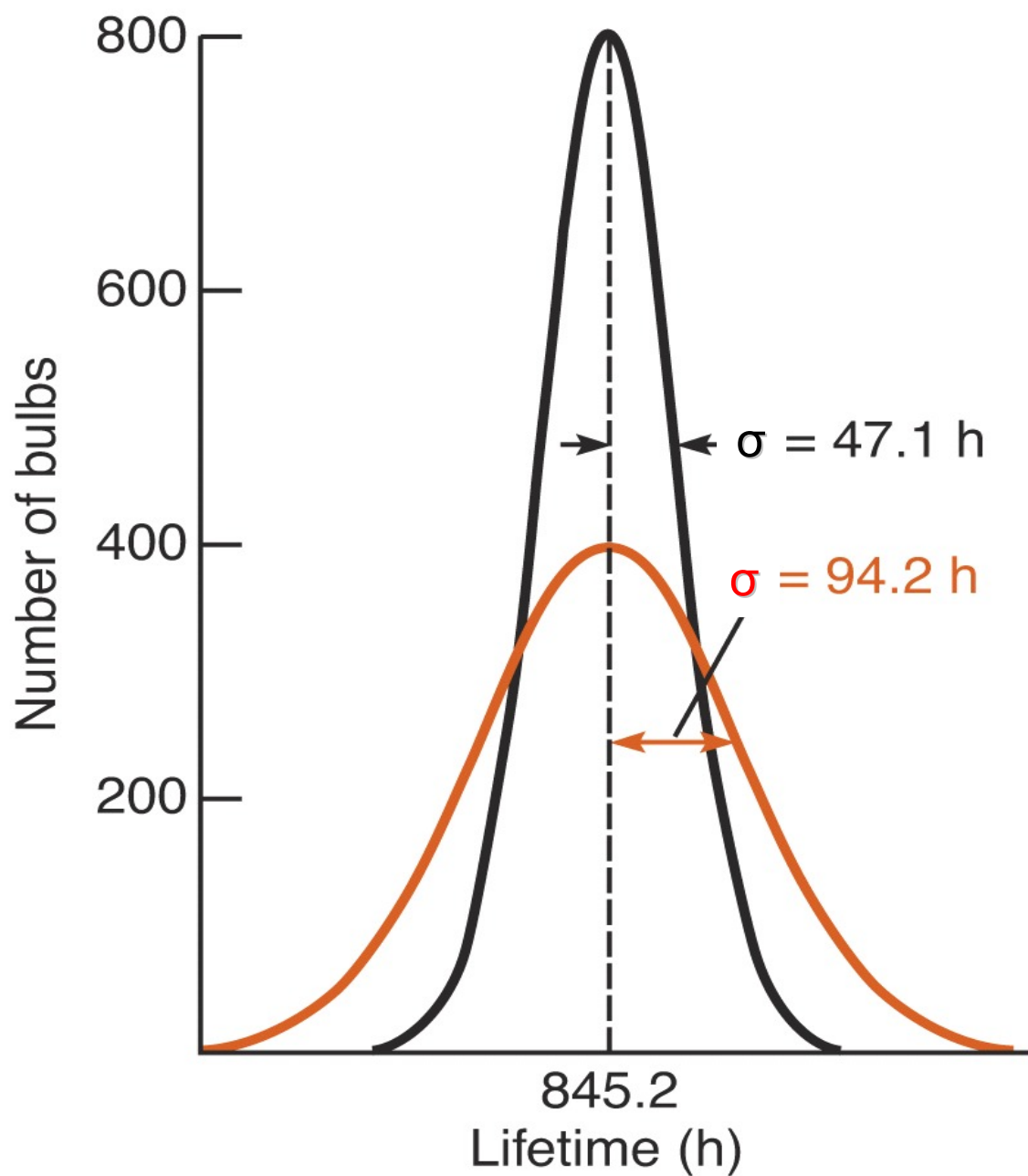
σ^2 : διασπορά

$\delta\bar{x}$: σφάλμα μέσης τιμής

$$\delta\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

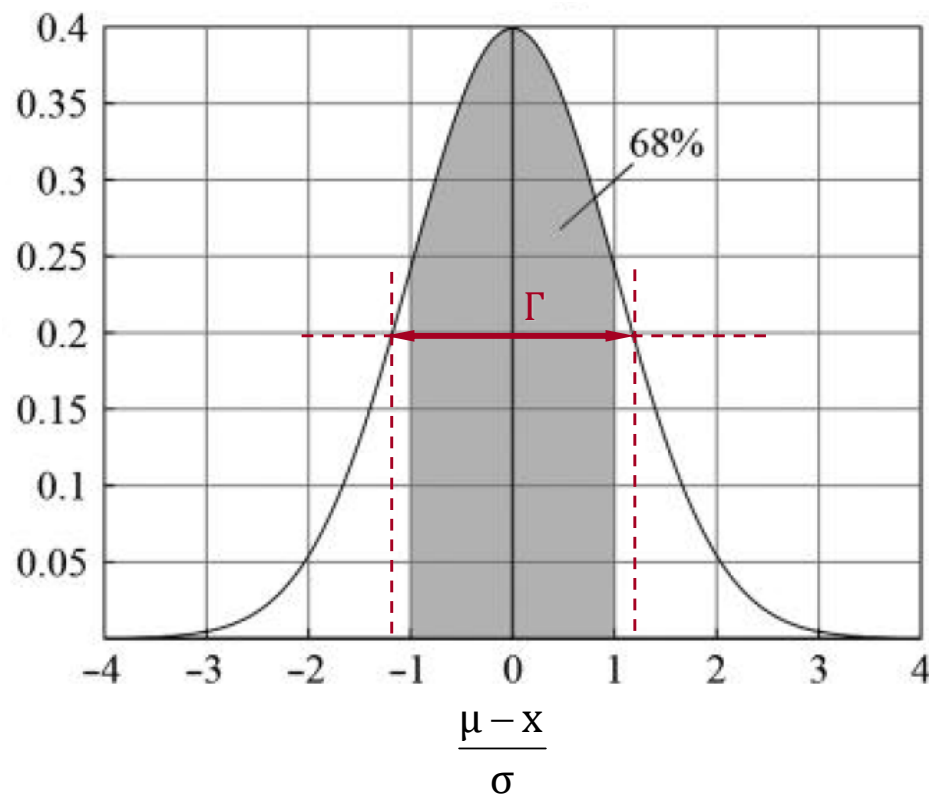
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}{(N-1)}}$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ



ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (Gauss)



Full Width at Half Maximum
 $\text{FWHM} = \Gamma$

$$f\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \frac{1}{2} f(0)$$



$$\Gamma = 2\sqrt{2\ln 2} \sigma$$

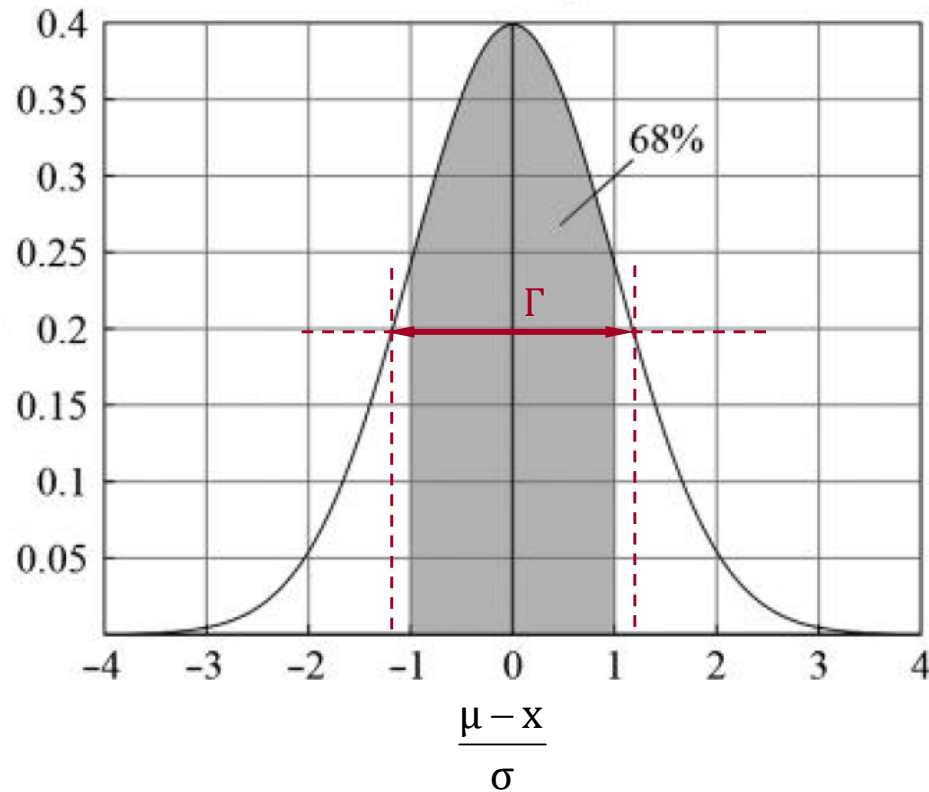


$$\Gamma = 2.35 \sigma$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}}$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (Gauss)



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}}$$

Απόδειξη

$$f\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \frac{1}{2} f(0)$$



$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Gamma/2)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{0^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{(\Gamma/2)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(\Gamma/2)^2}{2\sigma^2} = \ln 2$$



$$\Gamma = 2\sqrt{2\ln 2} \sigma$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Στατιστική Αβεβαιότητα

Έστω ότι μετρούμε N φορές την ίδια ποσότητα x και βρίσκουμε τις τιμές x_i , όπου $i=1,2,\dots, N$.

Αβεβαιότητα (Σφάλμα) Μέσης Τιμής

Μέση Τιμή

$$\bar{x} \equiv \langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\delta \bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}{N(N-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Δίνουμε σαν απάντηση:

(τιμή) $\pm$ (αβεβαιότητα)

$$(\bar{x}) \pm (\delta \bar{x})$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Παράδειγμα: Μέτρηση του βάρους B (σε N) ενός σώματος δίνει τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα για συνολικά 6 μετρήσεις:

10

8

11

12

10

9

i	B_i	$\bar{B} - B_i$	$(\bar{B} - B_i)^2$
1	10.0	0.0	0.0
2	8.0	+2.0	4.0
3	11.0	-1.0	1.0
4	12.0	-2.0	4.0
5	10.0	0.0	0.0
6	9.0	+1.0	1.0
	$\sum B_i = 60.0$	$\sum (\bar{B} - B_i) = 0.0$	$\sum (\bar{B} - B_i)^2 = 10.0$

$$\bar{B} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B_i = \frac{1}{6} 60.0 = 10.0$$

$$\delta \bar{B} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{B} - B_i)^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{10}{6 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.57735 \approx 0.6$$

$$\bar{B} \pm \delta \bar{B} = 10.0 \pm 0.6$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Παράδειγμα: Μέτρηση του βάρους B (σε N) ενός σώματος δίνει τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα για συνολικά 6 μετρήσεις:

10

8

11

12

10

9

i	B_i	$\bar{B} - B_i$	$(\bar{B} - B_i)^2$
1	10.0	0.0	0.0
2	8.0	+2.0	4.0
3	11.0	-1.0	1.0
4	12.0	-2.0	4.0
5	10.0	0.0	0.0
6	9.0	+1.0	1.0
	$\sum B_i = 60.0$	$\sum (\bar{B} - B_i) = 0.0$	$\sum (\bar{B} - B_i)^2 = 10.0$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{B} - B_i)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} = 1.4142 \approx 1.4$$

$$\bar{B} \pm \delta\bar{B} = 10.0 \pm 0.6$$

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ

Παράδειγμα: Κάποιος μετράει 6 φορές το μήκος ενός αντικειμένου και βρίσκει τις ακόλουθες τιμές (σε cm):

32.6

32.6

32.6

32.5

32.6

32.6

Με βάση τα προηγούμενα βρίσκει: $\bar{L} = 32.5833...$ $\delta\bar{L} = 0.01713...$

Και δίνει σαν αποτέλεσμα: $\bar{L} \pm \delta\bar{L} = 32.583 \pm 0.017$

Αν όλες οι μετρήσεις έδιναν 32.6
ποιό θα ήταν το σφάλμα της μέσης τιμής;
Μηδέν;

Αν το σφάλμα ανάγνωσης του οργάνου είναι 0.1cm τότε
η σωστή απάντηση είναι:

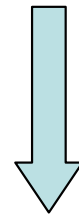
$$\bar{L} \pm \delta\bar{L} = 32.60 \pm 0.10$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Στρογγυλοποίηση αποτελέσματος

Να αποδώσετε με στρογγυλοποίηση τα παρακάτω πειραματικά αποτελέσματα, τα οποία πριν την σωστή εκτίμηση των σημαντικών ψηφίων έχουν ως ακολούθως:

$\bar{x}$	$\delta\bar{x}$		$\bar{y}$	$\delta\bar{y}$		$\bar{z}$	$\delta\bar{z}$
1,2352	0,2436		123180	6890		0,0567	0,0168



$$\bar{x} \pm \delta\bar{x} = 1,24 \pm 0,24$$

$$\bar{y} \pm \delta\bar{y} = 123000 \pm 7000$$

$$\bar{z} \pm \delta\bar{z} = 0,057 \pm 0,017$$

ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Έστω παράγωγο φυσικό μέγεθος $u = f(x, y, z, \dots)$, όπου $x, y, z, \dots$ είναι οι άμεσα μετρούμενες ποσότητες. Γνωρίζοντας τις μέσες τιμές και τα σφάλματα των μεγεθών αυτών

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots \quad \text{και} \quad \delta\bar{x}, \delta\bar{y}, \delta\bar{z}, \dots$$

ισχύει:

$$\bar{u} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$$

Το σφάλμα της μέσης τιμής $\bar{u}$ υπολογίζεται με τη βοήθεια των μερικών παραγώγων της συνάρτησης u ως προς τις μεταβλητές $x, y, z, \dots$, οι οποίες δομούν συντελεστές βαρύτητας στην **τετραγωνική άθροιση** των επιμέρους σφαλμάτων (**διάδοση σφάλματος**):

$$\delta\bar{u} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \delta\bar{x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \delta\bar{y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \delta\bar{z}\right)^2 + \dots}$$

ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Υπολογισμός της επιτάχυνσης σε ευθύγραμμη, ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, μέσω μέτρησης του αντίστοιχου διαστήματος s και χρόνου t .

$$a = \frac{2s}{t^2} \quad \bar{s} = (35.20 \pm 0.10) \text{ m} \quad \bar{t} = (12.0 \pm 0.5) \text{ s}$$

Η μέση τιμή της επιτάχυνσης a υπολογίζεται:

$$\bar{a} = \frac{2\bar{s}}{\bar{t}^2} = \frac{2 \cdot 35.2}{12.0^2} = 0.48888... \text{ m/s}^2$$

Το σφάλμα της μέσης τιμής δa υπολογίζεται:

$$\delta \bar{a} = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial s} \delta \bar{s}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t} \delta \bar{t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2} \delta \bar{s}\right)^2 + \left(\frac{-4s}{t^3} \delta \bar{t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{12^2} 0.1\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 35.2}{12^3} 0.5\right)^2} = 0.0407...$$

Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$\bar{a} \pm \delta \bar{a} = (0.49 \pm 0.04) \text{ m/s}^2$$

ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Ο τύπος της διάδοσης σφάλματος για παράγωγο φυσικό μέγεθος $u = f(x, y, z)$ της μορφής $u = x^\lambda y^\mu z^\nu$ απλουστεύεται με τη χρήση του **σχετικού σφάλματος**.
Εύκολα αποδεικνύεται πως:

$$\frac{\delta \bar{u}}{\bar{u}} = \sqrt{\left(\lambda \frac{\delta \bar{x}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\mu \frac{\delta \bar{y}}{\bar{y}}\right)^2 + \left(\nu \frac{\delta \bar{z}}{\bar{z}}\right)^2}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα της επιτάχυνσης ισχύει δηλαδή:

$$\frac{\delta \bar{a}}{\bar{a}} = \sqrt{\left(\frac{\delta s}{s}\right)^2 + \left(2 \frac{\delta t}{t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.1}{35.2}\right)^2 + \left(2 \frac{0.5}{12}\right)^2} = 0.083381...$$

και κατά συνέπεια: $\delta \bar{a} = 0.083381 \cdot \bar{a} = 0.083381 \cdot 0.48888 = 0.0407...$

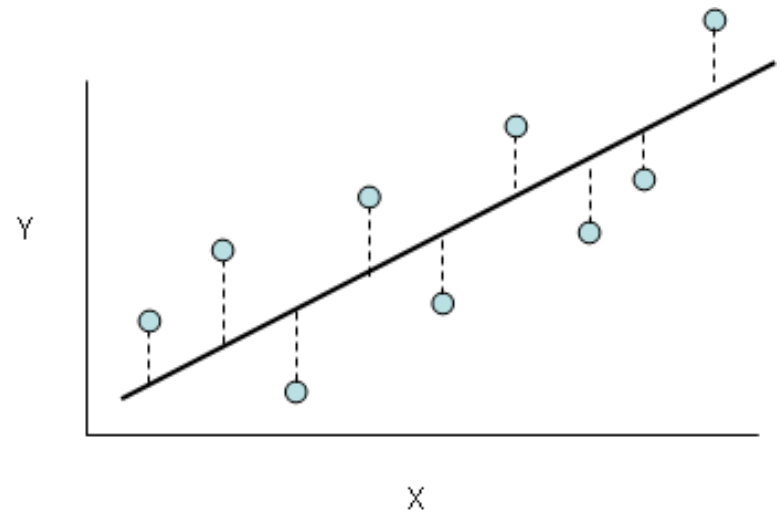
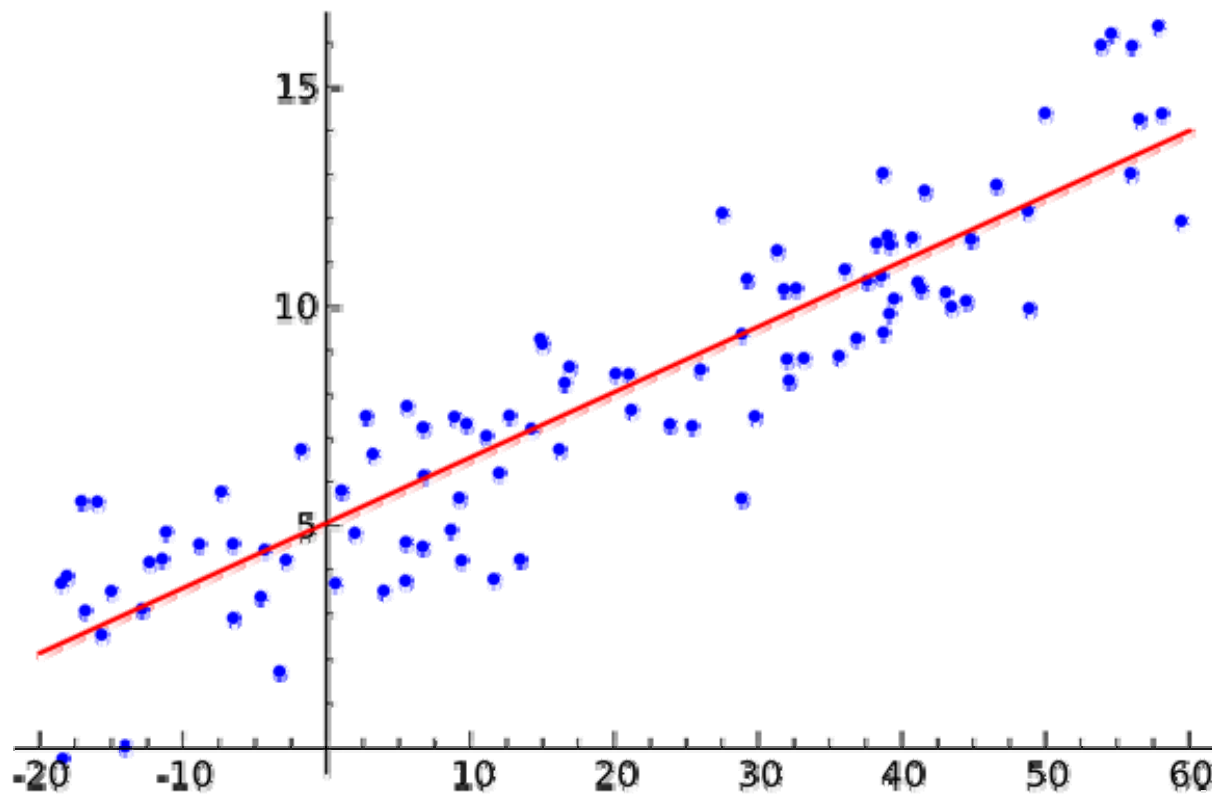
με τελικό αποτέλεσμα:

$$\bar{a} \pm \delta \bar{a} = (0.49 \pm 0.04) \text{ m/s}^2$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Μέθοδος Μαθηματικής Βελτιστοποίησης

Το κλασικό πρόβλημα: Η βέλτιστη ευθεία που περιγράφει πειραματικά σημεία ενός γραμμικά εξαρτημένου φυσικού μεγέθους.



Απόκλιση Σημείου

$$\Delta y = y^{\text{exp}} - y^{\text{th}}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Μέθοδος Μαθηματικής Βελτιστοποίησης

Επίλυση: Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους, η οποία ορίζεται ως το συνολικό άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων.

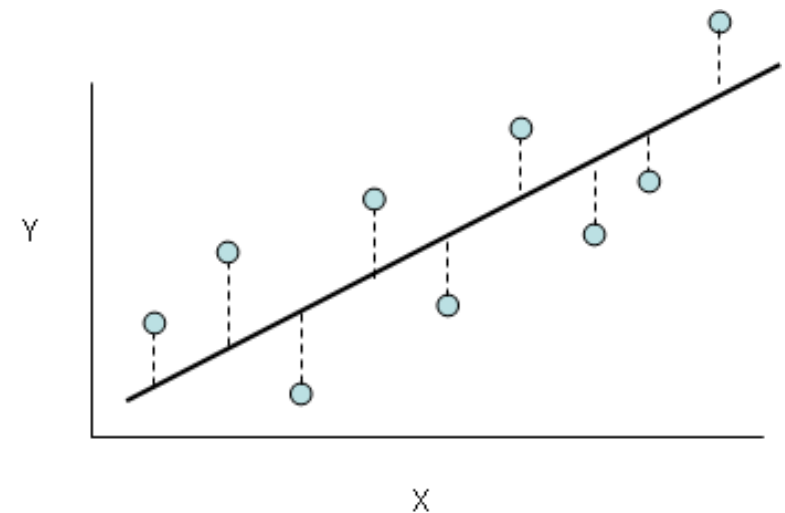
Συνάρτηση Κόστους

$$\chi^2 = \sum_i (y_i^{\text{exp}} - y_i^{\text{th}})^2$$



$$\min \chi^2$$

Ελαχιστοποίηση του χ^2



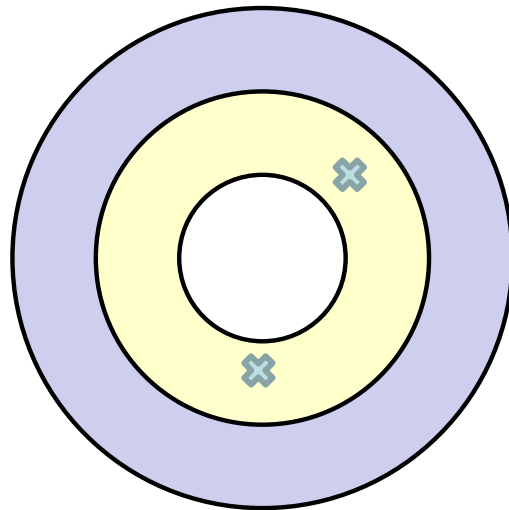
Απόκλιση Σημείου

$$\Delta y = y^{\text{exp}} - y^{\text{th}}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Μέθοδος Μαθηματικής
Βελτιστοποίησης

Ερώτημα: Γιατί το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων;

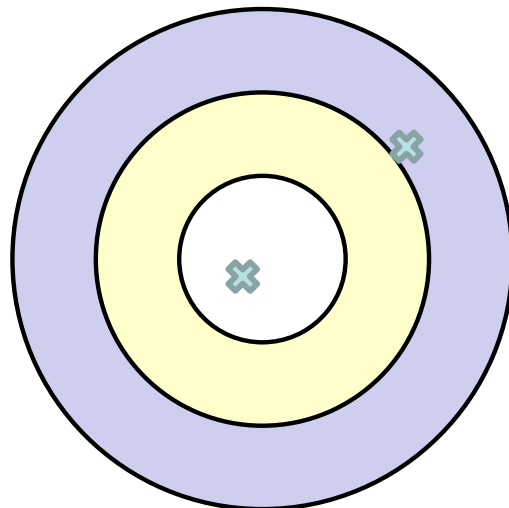


1^{ος} Παίκτης

Άθροισμα Αποκλίσεων: $1 + 1 = 2$

Άθροισμα Τετραγωνικών Αποκλίσεων: $1^2 + 1^2 = 2$

Κερδίζει ο 1^{ος} Παίκτης!



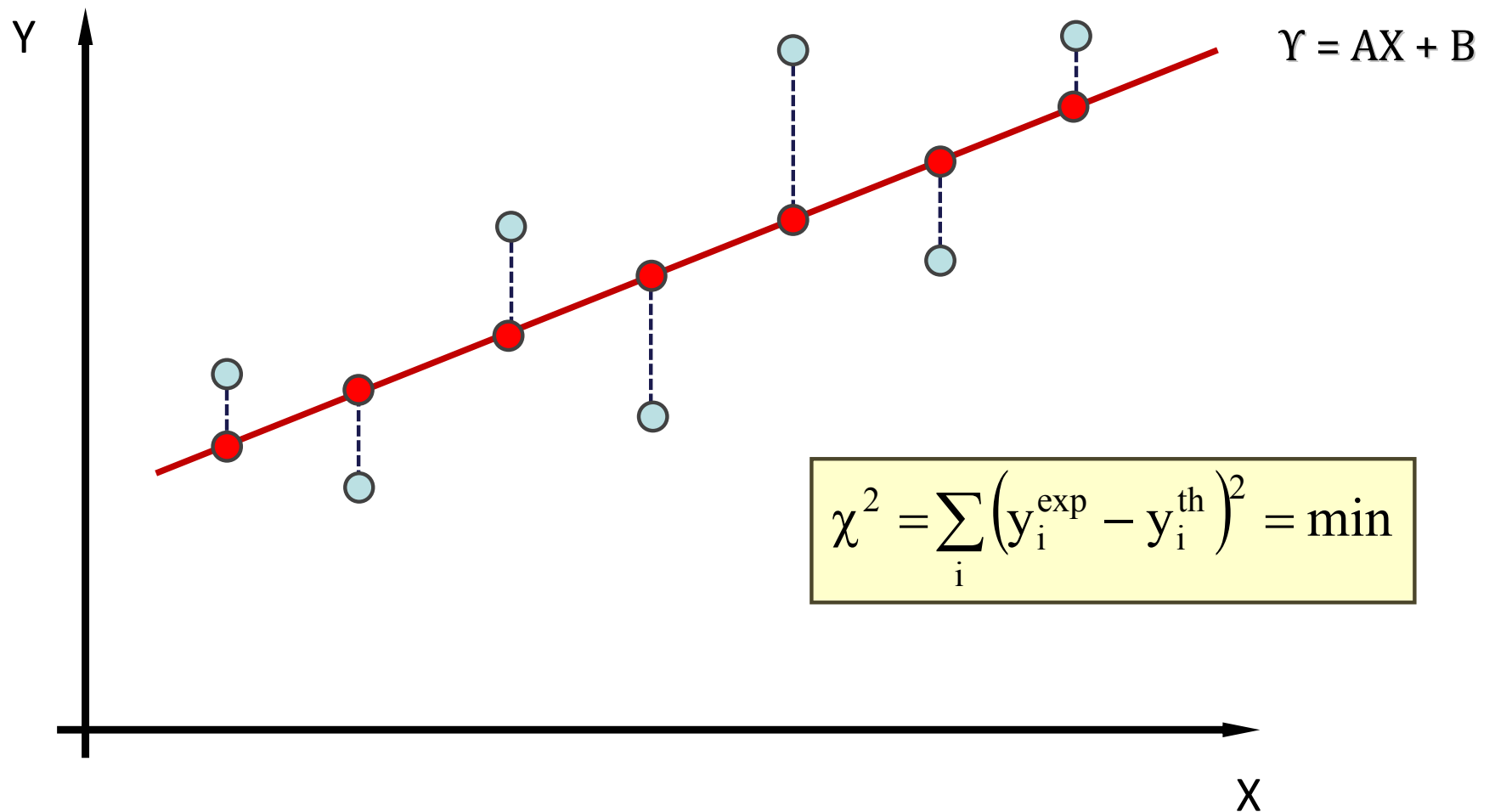
2^{ος} Παίκτης

Άθροισμα Αποκλίσεων: $0 + 2 = 2$

Άθροισμα Τετραγωνικών Αποκλίσεων: $0^2 + 2^2 = 4$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Οι συντελεστές A και B της βέλτιστης ευθείας καθορίζονται από το κριτήριο ελαχιστοποίησης της συνάρτησης χ^2 .



ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Μπορούμε να υπολογίσουμε τα **A** και **B** και να χαράξουμε τη βέλτιστη ευθεία

$$y = A + Bx$$

όπου οι συντελεστές **A** και **B** δίνονται από τις σχέσεις:

$$A = \frac{\left(\sum_{i=1}^N y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)}{N \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}$$

$$B = \frac{N \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N y_i\right)}{N \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Τα σφάλματα των **A** και **B** ($\delta A, \delta B$) υπολογίζονται:

$$\delta A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}}, \quad \delta B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{N \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}}$$

όπου:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - A - Bx_i)^2}{N - 2}}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Εύρεση των παραμέτρων της ευθείας a και b

Εφόσον $f(x) = a + b \cdot x \Rightarrow \chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{a + bx_i - y_i}{\sigma_i} \right)^2 = \chi^2(a, b)$

Η ελαχιστοποίηση της ποσότητας χ^2 , η οποία εξαρτάται μόνο από τα a και b , επιτυγχάνεται με μηδενισμό των μερικών παραγώγων:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \frac{2[(a + bx_i) - y_i] \cdot 1}{\sigma_i^2} = 0 \\ \sum_{i=1}^N \frac{2[(a + bx_i) - y_i] \cdot x_i}{\sigma_i^2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \frac{[(a + bx_i) - y_i]}{\sigma_i^2} = 0 \\ \sum_{i=1}^N \frac{[(a + bx_i) - y_i] \cdot x_i}{\sigma_i^2} = 0 \end{array} \right\}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Καταλήγουμε έτσι στο γραμμικό σύστημα των δύο εξισώσεων ως προς a και b :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} + b \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2} \\ a \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} + b \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \end{array} \right\}$$

Παρατηρούμε πως οι υπεισερχόμενοι συντελεστές είναι αθροίσματα δυναμοσειρών του x και ροπών του y . Αν για διευκόλυνση ορίσουμε αντίστοιχα

$$S_k = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^k}{\sigma_i^2}, \quad W_k = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^k y_i}{\sigma_i^2}$$

τότε το σύστημα γράφεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} aS_0 + bS_1 = W_0 \\ aS_1 + bS_2 = W_1 \end{array} \right\}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Οι λύσεις του συστήματος αυτού δίνουν:

$$\begin{cases} aS_0 + bS_1 = W_0 \\ aS_1 + bS_2 = W_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\begin{vmatrix} W_0 & S_1 \\ W_1 & S_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}}, & b = \frac{\begin{vmatrix} S_0 & W_0 \\ S_1 & W_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}} \end{cases}$$

οι οποίες δίνουν τις προηγούμενες εκφράσεις για τις τιμές των a και b :

$$a = \frac{\left(\sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right) - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right) - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2}, \quad b = \frac{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i \cdot y_i}{\sigma_i^2} \right) - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right)}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right) - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2}$$

Σημείωση: Στην παραπάνω απόδειξη έχουν συμπεριληφθεί και τα σφάλματα των μετρήσεων σ_i , τα οποία παίζουν τον ρόλο συντελεστών βαρύτητας στην συνολική διαμόρφωση της ποσότητας χ^2 .

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Παράδειγμα για δεδομένα (N=7)

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 5.1 \\ 6.8 \\ 9.1 \\ 11.3 \\ 12.5 \\ 15.0 \\ 17.8 \end{pmatrix} \quad \text{Err} := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.5 \\ 0.8 \\ 1.0 \\ 1.8 \\ 2.2 \end{pmatrix}$$

$$S(k) := \sum_{i=1}^N \frac{(X_i)^k}{(\text{Err}_i)^2}$$

$$W(k) := \sum_{i=1}^N \frac{(X_i)^k \cdot Y_i}{(\text{Err}_i)^2}$$

$$DD := \begin{pmatrix} S(0) & S(1) \\ S(1) & S(2) \end{pmatrix}$$

$$DA := \begin{pmatrix} W(0) & S(1) \\ W(1) & S(2) \end{pmatrix}$$

$$DB := \begin{pmatrix} S(0) & W(0) \\ S(1) & W(1) \end{pmatrix}$$

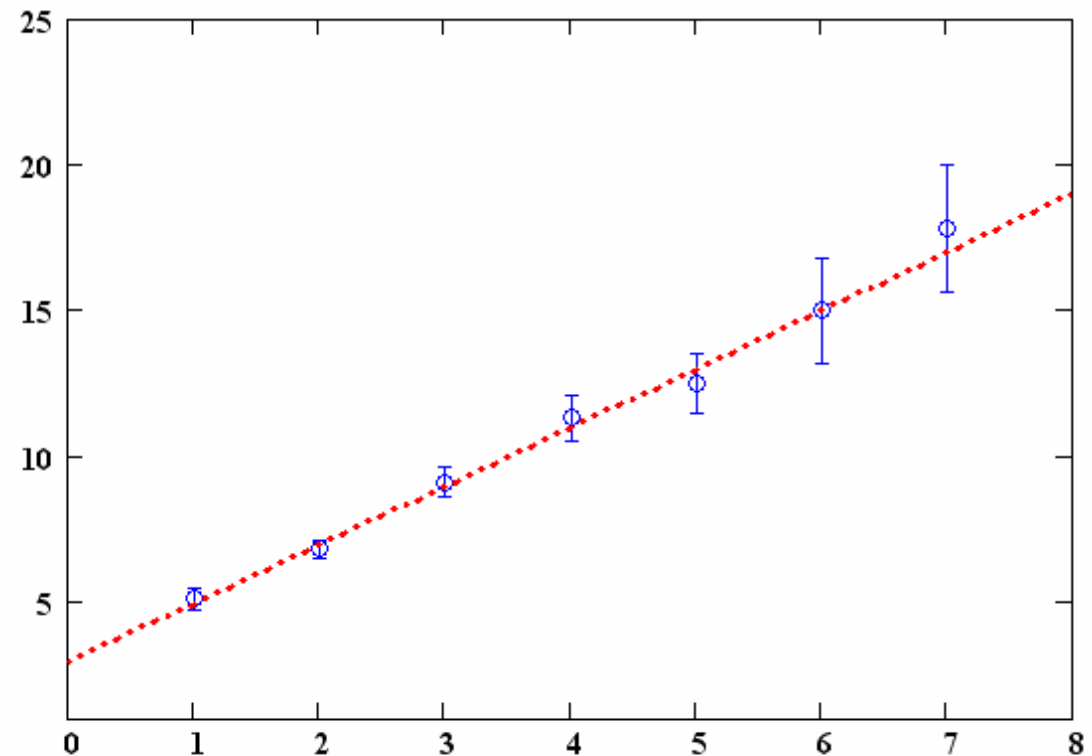
$$Y=a+bX$$

$$a := \frac{|DA|}{|DD|}$$

$$a = 2.936$$

$$b := \frac{|DB|}{|DD|}$$

$$b = 2.009$$

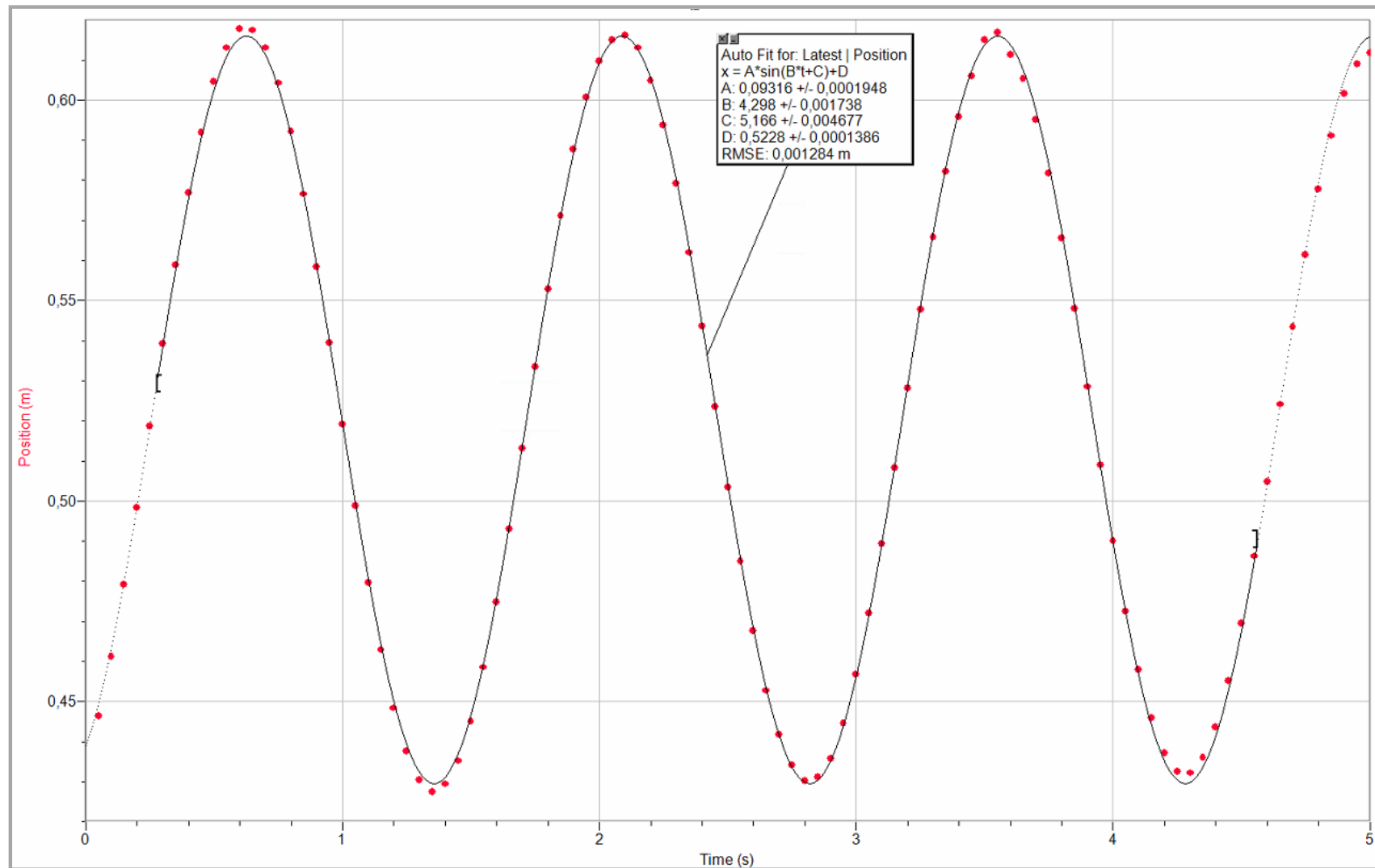


ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ

για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Για δοσμένη μάζα m μέτρηση της περιόδου T και της επιμήκυνσης του ελατηρίου Δx .



ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ

για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Για δοσμένη μάζα m μέτρηση της περιόδου T και της επιμήκυνσης του ελατηρίου Δx .

m (gr)	$\frac{2n}{(s)^T}$	D (m)	
120	4.354 ± 0.0022	0.6953 ± 0.00018	$X_0 = 0.875 \pm 0.001$
100	4.609 ± 0.0024	0.7531 ± 0.00019	
150	4.036 ± 0.0023	0.6113 ± 0.00029	
80	4.911 ± 0.0076	0.8045 ± 0.00066	
70	5.010 ± 0.014	0.8237 ± 0.00093	

Πειραματικά δεδομένα της 18^{ης} Οκτωβρίου 2018 (Αμφιθέατρο **ΑΡΙΣΤΑΡΧΟΣ**)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ

για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Για δοσμένη μάζα m μέτρηση της περιόδου T και της επιμήκυνσης του ελατηρίου Δx .

$$X_0 = 0.875 \pm 0.001 \text{ m}$$

$m \text{ (kg)}$	$2\pi/T \text{ (s}^{-1}\text{)}$	$D \text{ (m)}$	$\Delta x \text{ (m)}$
0.150	4.036 ± 0.0023	0.6113 ± 0.00029	0.264
0.120	4.354 ± 0.0022	0.6953 ± 0.00018	0.180
0.100	4.609 ± 0.0024	0.7531 ± 0.00019	0.122
0.080	4.911 ± 0.0076	0.8045 ± 0.00066	0.070
0.070	5.010 ± 0.0140	0.8237 ± 0.00093	0.051

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ

για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Νόμος του Hooke: $F = mg = k \Delta x$

$$M := \begin{pmatrix} 0.150 \\ 0.120 \\ 0.100 \\ 0.080 \\ 0.070 \end{pmatrix}$$

$$DX := \begin{pmatrix} 0.264 \\ 0.180 \\ 0.122 \\ 0.070 \\ 0.051 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{mm}}{F} := M \cdot 9.81 \quad F = \begin{pmatrix} 1.4715 \\ 1.1772 \\ 0.981 \\ 0.7848 \\ 0.6867 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{mm}}{N} := \text{length}(M)$$

$$u := \text{slope}(DX, F)$$

$$v := \text{intercept}(DX, F)$$

$$u = 3.626$$

$$v = 0.522$$

$$\Delta u = 0.096$$

$$\Delta v = 0.0152$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

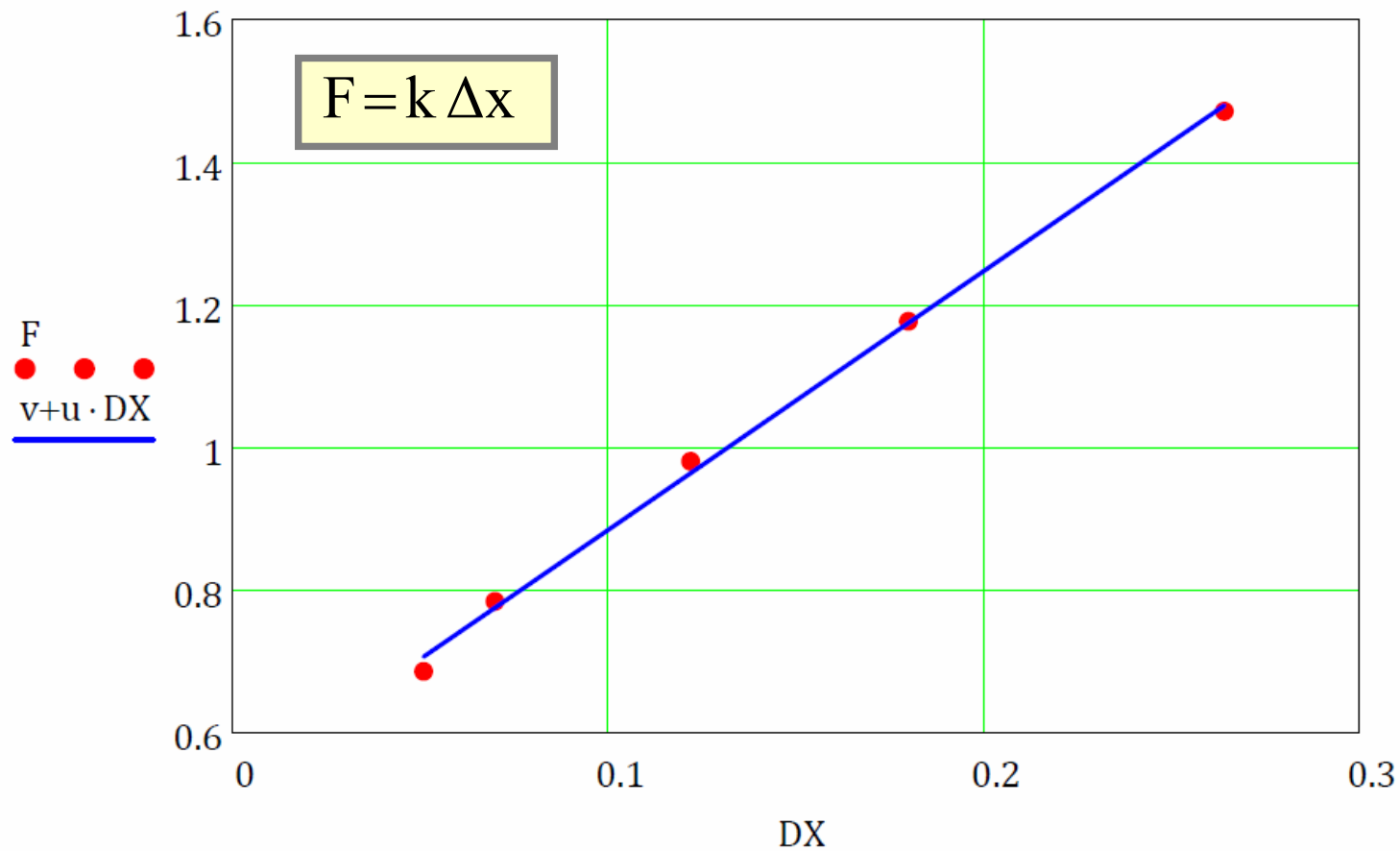
ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ

για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Νόμος του Hooke: $F = mg = k \Delta x$

$$u = 3.626$$

$$v = 0.522$$



ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ

για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Ταλάντωση Ελατηρίου: $T = 2\pi (m/k)^{1/2}$

$$M := \begin{pmatrix} 0.150 \\ 0.120 \\ 0.100 \\ 0.080 \\ 0.070 \end{pmatrix}$$

$$T_p := \begin{pmatrix} 4.036 \\ 4.354 \\ 4.609 \\ 4.911 \\ 5.010 \end{pmatrix}$$

$$M_0 := 0.000$$

$$T_{2p} := \left(\frac{1}{T_p} \right)^2$$

$$MM := M + M_0$$

$$N := \text{length}(M)$$

$$u := \text{slope}(T_{2p}, MM) \quad v := \text{intercept}(T_{2p}, MM)$$

$$u = 3.636$$

$$\Delta u = 0.110$$

$$v = -0.072$$

$$\Delta v = 0.0054$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ

για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

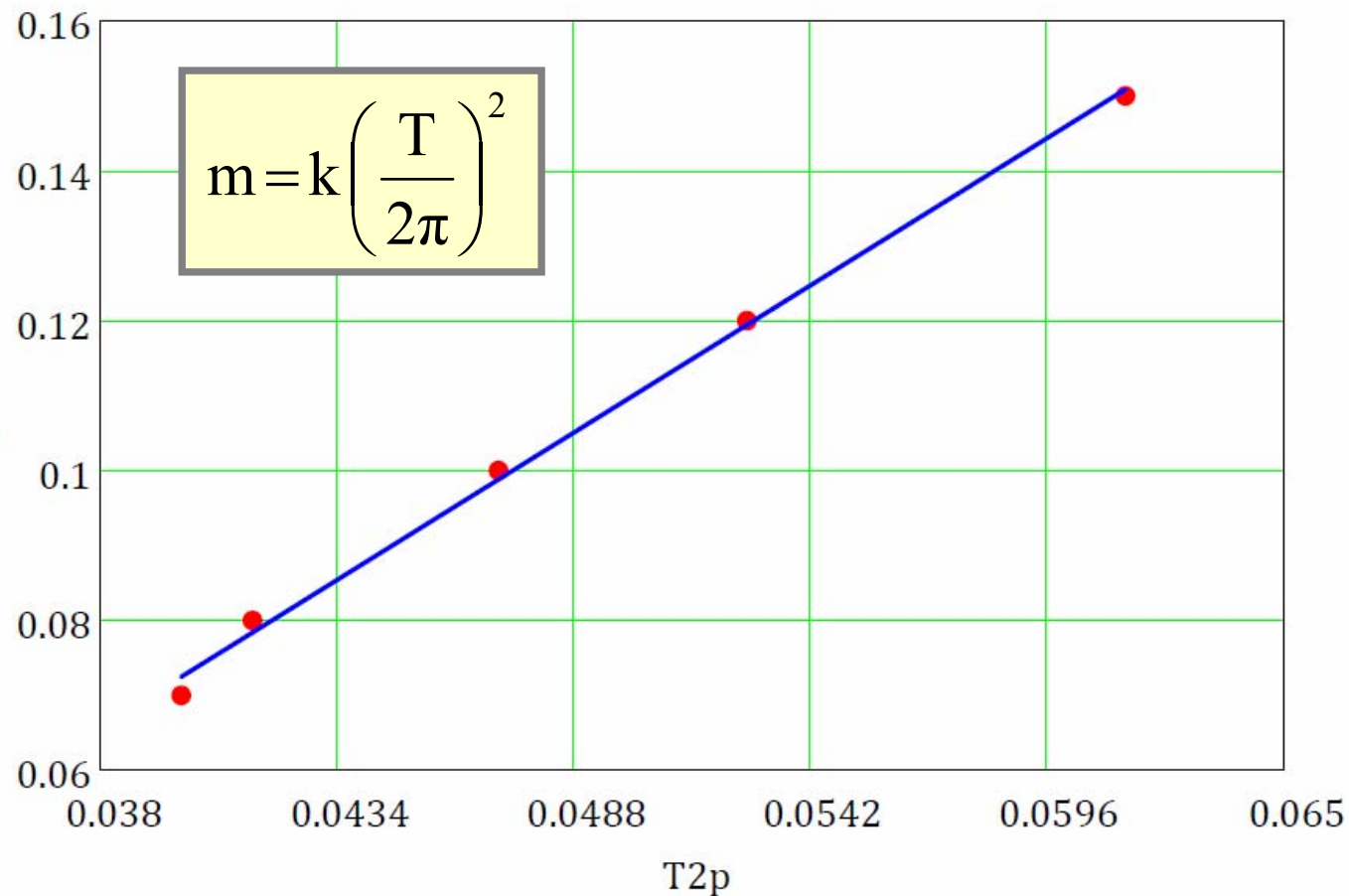
Ταλάντωση Ελατηρίου: $T = 2\pi (m/k)^{1/2}$

$$u = 3.636$$

$$v = -0.072$$

$$T2p \rightarrow (T/2\pi)^2$$

$$\frac{MM}{v+u \cdot T2p}$$



ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

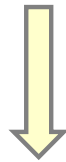
ΠΕΙΡΑΜΑ ΑΜΦΙΘΕΑΤΡΟΥ

για τον προσδιορισμό σταθεράς ελατηρίου k

Τελικά αποτελέσματα με ανάλυση ελαχίστων τετραγώνων

Νόμος του Hooke

$$F = k \Delta x$$



$$k = (3.63 \pm 0.10) \text{ N/m}$$

Ταλάντωση Ελατηρίου

$$m = k \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2$$



$$k = (3.64 \pm 0.11) \text{ N/m}$$

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΕΡΝΙΕΡΟΥ

Pierre Vernier (1580–1637)

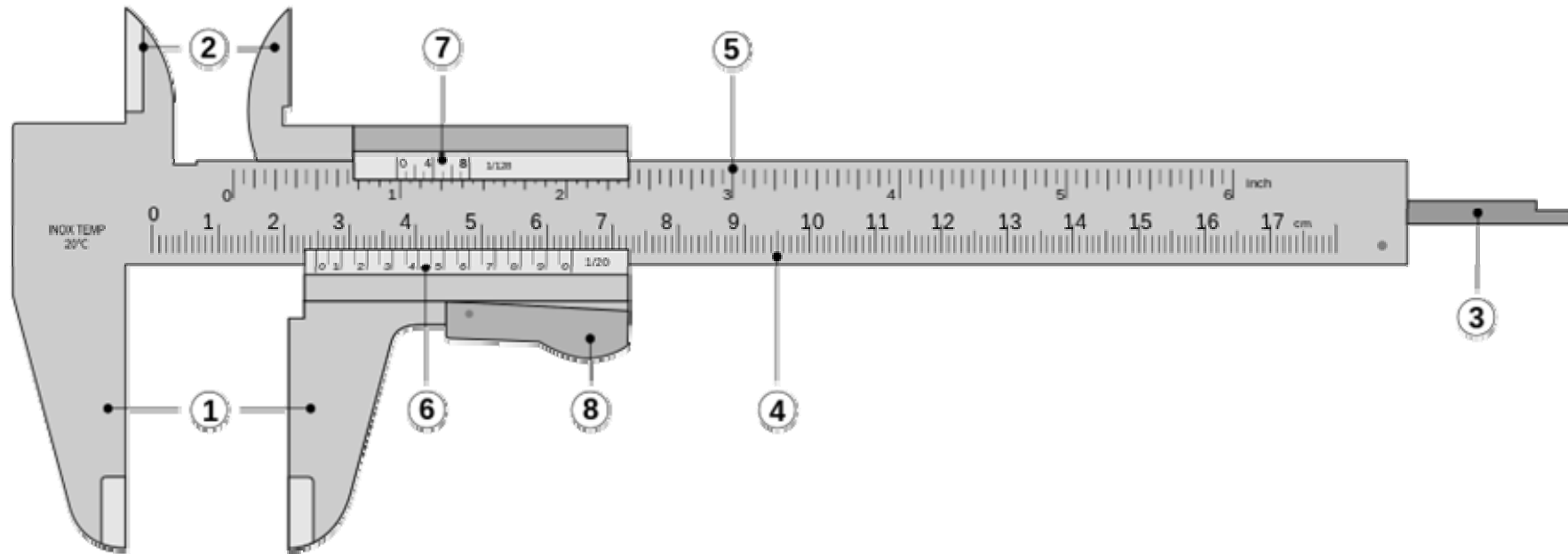
Άσκηση Α6



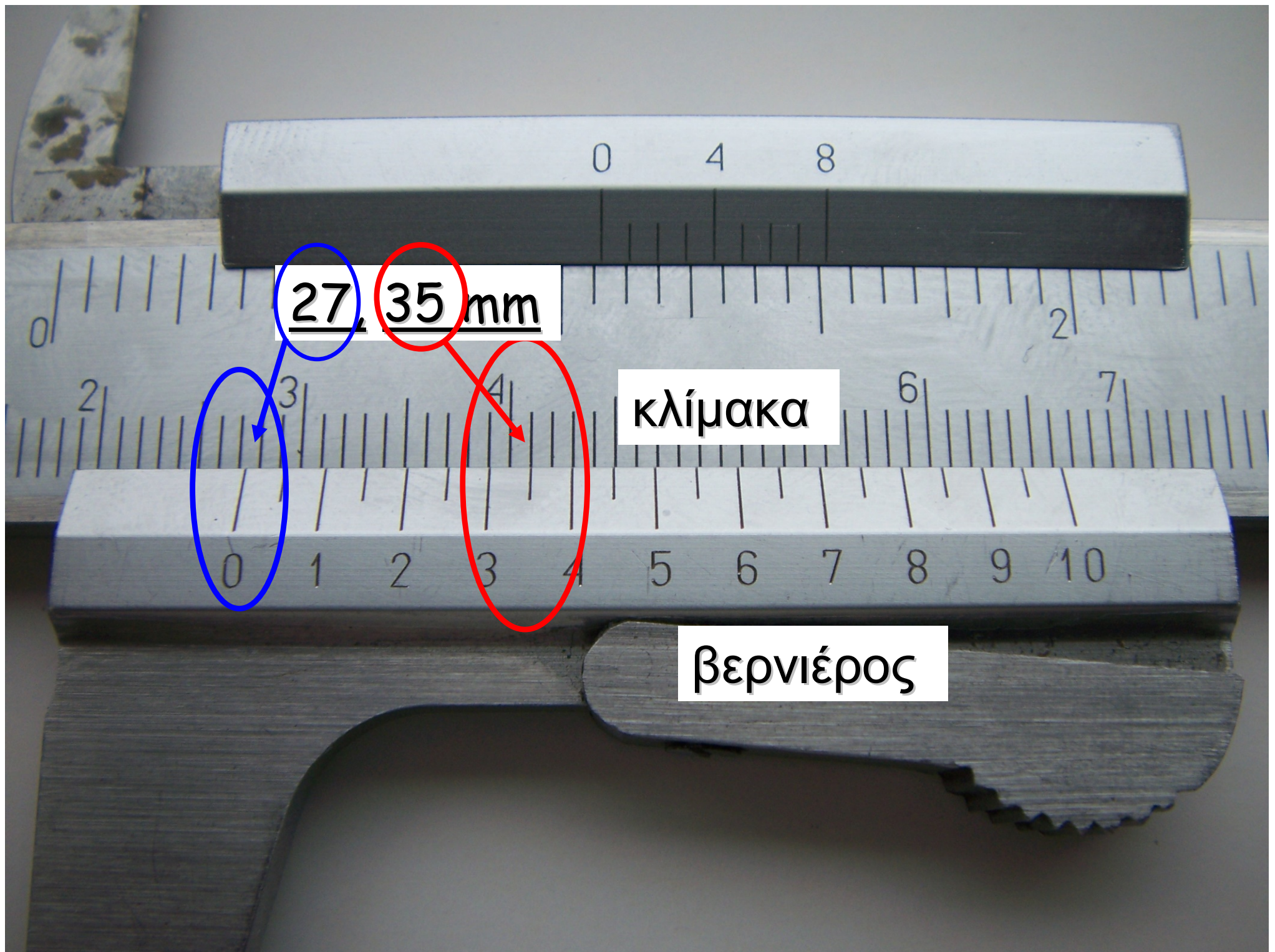
Χρησιμοποιήθηκε αρχικά για τη μέτρηση μηκών με μεγαλύτερη ακρίβεια.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΒΕΡΝΙΕΡΟΥ



- Έχει δύο κλίμακες: σταθερή (4) και κινητή (6) (βερνιέρου).
- Γινόταν αρχικά υποδιαίρεση της κλίμακας του βερνιέρου ώστε να αντιστοιχούν 10 υποδιαιρέσεις του σε 9 της κυρίας κλίμακας. Αυτό έδινε τη δυνατότητα να εκτιμηθεί με άνεση κλάσμα της κυρίας κλίμακας με ακρίβεια $1/10$.
- Σήμερα οι υποδιαιρέσεις γίνονται στο $1/20$ (0.05 ακρίβεια) και υπάρχουν και σε άλλες μετρήσεις π.χ. γωνιών.



Μικρόμετρο

(0,01mm)

Άσκηση Α6



$$(6,50 + 0,15) = 6,65 \text{ mm}$$

