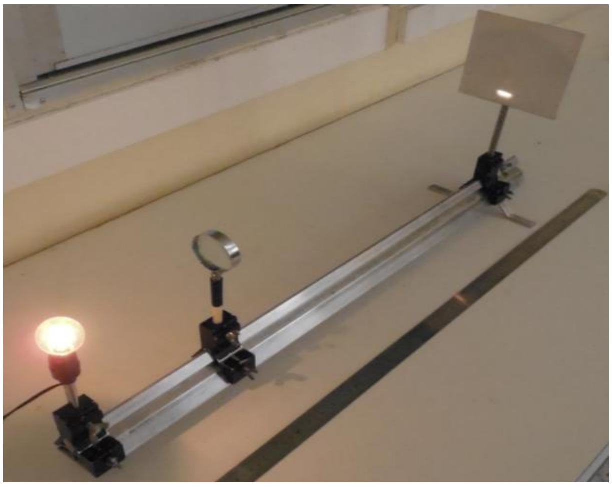
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ
«Καίσαρ Δ. Αλεξόπουλος»
http://physlab.phys.uoa.gr

# Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής για τους φοιτητές του Τμήματος Γεωλογίας




**Αθήνα 2019**

Για την εγκατάσταση των Ασκήσεων και συγγραφή του Φυλλαδίου εργάστηκαν τα εξής μέλη ΔΕΠ, ΕΔΙΠ και ΕΤΕΠ (με αλφαβητική σειρά): Χ. Γεωργάκη, Στ. Καρατάσου, Ν. Μαμαλούγκος, Α. Παπαθανασίου, Ε. Σκορδάς, Ε. Συσκάκης, Μ. Χατζάκη, Ε. Χατζηκωντής.

*Υπεύθυνος Εργαστηριακών Ασκήσεων Φυσικής*

*για τους Φοιτητές του Α΄ έτους του Τμήματος Γεωλογίας:*

Επίκουρος Καθηγητής Ευθύμιος Σκορδάς

e-mail: eskordas@phys.uoa.gr, αρ.τηλ. 210 727 6735

*Διευθυντής Εργαστηρίου Φυσικής:*

Αναπληρωτής Καθηγητής Έκτορας Νισταζάκης

e-mail: enistaz@phys.uoa.gr, αρ.τηλ. 210 727 6710

Δικτυακός τόπος Εργαστηρίου Φυσικής: http://physlab.phys.uoa.gr

Σχεδιασμός, κατασκευή, διαχείριση δικτυακού τόπου, επιμέλεια παρόντος φυλλαδίου και cd διδακτικού υλικού Εργαστηρίου Φυσικής: Νεκτάριος Μαμαλούγκος

# Περιεχόμενα



## Κύκλος 1

ΓΕΩ 1.1: Μέτρηση Εστιακής Απόστασης συγκλίνοντος Φακού

ΓΕΩ 1.2: Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με εκκρεμές

ΓΕΩ 1.3: Εισαγωγική Άσκηση Ηλεκτρισμού

## Κύκλος 2

ΓΕΩ 2.1: Προσδιορισμός μήκους κύματος δέσμης Laser (He-Ne) με φράγμα

ΓΕΩ 2.2: Βαθμονόμηση Θερμοζεύγους- θερμοηλεκτρικό φαινόμενο

ΓΕΩ 2.3: Μέτρηση του συντελεστή εσωτερικής τριβής με την πτώση μικρών σφαιρών

# Κανονισμός λειτουργίας Εργαστηρίου Φυσικής

## Α. Γενικοί Κανόνες

**ΕΓΓΡΑΦΗ και ΤΜΗΜΑΤΑ:** Οι φοιτητές/τριες εγγράφονται στο εργαστήριο σε ομάδες των δύο φοιτητών. Τρεις έως πέντε ομάδες συγκροτούν τμήμα το οποίο ασκείται συγκεκριμένη ημέρα και ώρα υπό την επίβλεψη ενός διδάσκοντα.

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:** Ο Επιβλέπων ενημερώνει τους φοιτητές/τριες για το όνομά του, το γραφείο του, τηλέφωνο, email, καθώς και ώρες στις οποίες θα μπορούσαν να έλθουν σε επαφή μαζί του για τυχόν απορίες.

**ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ:** Κάθε φοιτητής/τρια εκτελεί αριθμό ασκήσεων, χωρισμένων σε κύκλους, ανάλογα με το Εργαστήριο, συνήθως κυκλικά. Οι φοιτητές/τριες πληροφορούνται κατά την εγγραφή την πρώτη άσκηση και τη σειρά διαδοχής των ασκήσεων. Ειδικά για το (νέο) Εργαστήριο Φ1 υπάρχει ιδιαίτερη διαδοχή των πρώτων εργαστηριακών ασκήσεων (βλέπε Ειδικοί Κανόνες).

**ΠΡΟΣΕΛΕΥΣΗ:** Οι φοιτητές/τριες προσέρχονται στην θέση τους ως την επίσημη ώρα έναρξης, η οποία είναι «**και τέταρτο**» ή «**παρά τέταρτο**» ανάλογα με την ώρα έναρξης του Τμήματός τους. Για παράδειγμα το Τμήμα 10:00-12:30 ξεκινά στις **10:15** και το 11:30-14:00 στις **11:45 ακριβώς**. Αν η καθυστέρηση υπερβαίνει το όριο αυτό **δεν επιτρέπεται να ασκηθούν και χρεώνονται με απουσία**.

**ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ:** Ο φοιτητής/τρια όταν προσέρχεται, θα πρέπει να είναι **προετοιμασμένος** για την Άσκηση που θα εκτελέσει, με βάση το κείμενο του Φυλλαδίου και σχετικές αναφορές. Ο Διδάσκων, με προφορική ή γραπτή εξέταση, αξιολογεί την μελέτη του φοιτητή στην άσκηση που πρόκειται να κάνει.

Αν φοιτητής/τρια δεν έχει προετοιμασθεί για την άσκηση που θα εκτελέσει, λαμβάνει μηδενικό βαθμό προφορικής εξέτασης.

**ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ**: Το εργαστήριο διαρκεί 2 ½ ώρες και οι φοιτητές/τριες αξιοποιούν όλο τον χρόνο τους. Όταν έχουν ολοκληρώσει τις μετρήσεις τους, αρχίζουν τους υπολογισμούς, την επεξεργασία των μετρήσεων κλπ.

Για την εκτέλεση της εργαστηριακής ασκήσεως ο φοιτητής/τρια πρέπει να: **α**. Εκτελεί την άσκηση σύμφωνα με τις οδηγίες του φυλλαδίου και του διδάσκοντα καταχωρώντας τις μετρήσεις σε κατάλληλα φύλλα εργασίας. **β**. Απευθύνεται στον διδάσκοντα για κάθε απορία.

Μετά το πέρας της άσκησης οι φοιτητές/τριες ο Επιβλέπων υπογράφει τις μετρήσεις και πριν αποχωρήσουν τακτοποιούν την πειραματική διάταξη.

**ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ: Ακριβώς μία εβδομάδα μετά την εκτέλεση της άσκησης κάθε φοιτητής/τρια παραδίδει την γραπτή εργασία του**. Κάθε φοιτητής/τρια υποβάλλει **πρωτότυπη, διαφορετική** εργασία, για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα (η σειρά ενδεικτική, αλλά τα σημεία υποχρεωτικά):

Γράφεται σε φύλλα χαρτιού Α4 τα οποία συρράπτονται στο Εξώφυλλο Εργαστηρίου εκτός και δοθούν ειδικά φύλλα από το Εργαστήριο.

Οι γραφικές παραστάσεις πρέπει να είναι σε χιλιοστομετρικό χαρτί (μιλλιμετρέ) ή σε ημιλογαριθμικό χαρτί (ανάλογα με το εύρος τιμών), να είναι φτιαγμένες με το χέρι εκτός από τις Ασκήσεις που εκτελούνται στο Εργαστήριο με την χρήση υπολογιστή.

Στην αρχή της Εργασίας σας γίνεται συνοπτική καταγραφή των φυσικών εννοιών, φαινόμενων και μεγεθών οι οποίες χρησιμοποιούνται στην άσκηση.

Ακολουθεί σύντομη και περιεκτική περιγραφή της πειραματικής διάταξης και πειραματικής διαδικασίας με τα σχετικά σχήματα.

Οι πίνακες των δεδομένων, η επεξεργασία των μετρήσεων, οι απαραίτητες γραφικές παραστάσεις και τα τελικά αποτελέσματα με τις κατάλληλες μονάδες τους.

Ο σχολιασμός των αποτελεσμάτων.

Οι απαντήσεις στις ερωτήσεις του φυλλαδίου.

Στο τέλος επισυνάπτονται οι σελίδες με τις υπογεγραμμένες από τον Επιβλέποντα πειραματικές μετρήσεις.

**ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΡΓΑΣΙΩΝ:** Ο Επιβλέπων στη διάρκεια μιας εβδομάδας ελέγχει τις εργασίες και στη συνέχεια δείχνει στους φοιτητές/τριες τις διορθώσεις του συζητώντας μαζί τους (με όλους ή ατομικά) τα προβλήματα που είχαν. Οι φοιτητές/τριες βλέπουν τα λάθη τους, αλλά δεν δικαιούνται να πάρουν μαζί τους την διορθωμένη εργασία.

**ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ:** Οι φοιτητές/τριες βαθμολογούνται σε κάθε άσκηση. Ο βαθμός άσκησης προκύπτει από τον προφορικό βαθμό (δραστηριότητα στη άσκηση, γνώσεις κλπ., με βάρος 2/3) και από την γραπτή εργασία (με βάρος 1/3). Από τους βαθμούς των ασκήσεων κάθε κύκλου προκύπτει βαθμός κύκλου. Ο βαθμός ΔΕΝ είναι ακέραιος, αλλά έχει την μορφή #.#.

Αν φοιτητής/τρια δεν παραδώσει εγκαίρως την γραπτή εργασία, λαμβάνει μηδενικό βαθμό στην άσκηση (προφορικό & γραπτό).

Αν φοιτητής/τρια δεν παραδώσει καμία γραπτή εργασία στον κύκλο, **επαναλαμβάνει τον κύκλο σε επόμενο έτος**.

Αν φοιτητής/τρια λάβει σε κάποιο κύκλο βαθμό κάτω από την βάση (< 5), **επαναλαμβάνει τον κύκλο σε επόμενο έτος**.

Ο τελικός βαθμός του εργαστηρίου προκύπτει από τους βαθμούς των κύκλων και είναι ακέραιος.

**ΑΠΟΥΣΙΑ: Αν φοιτητής/τρια δεν προσέλθει σε άσκηση χρεώνεται με απουσία. Μία (1) μόνο απουσία** αναπληρώνεται από τον φοιτητή/τρια μετά την ολοκλήρωση του συνόλου των Εργαστηριακών Ασκήσεων στην **Συμπληρωματική Εργαστηριακή Άσκηση**, σε ημέρα και ώρα που καθορίζεται από το Συντονιστή του αντίστοιχου Εργαστηρίου. Αν ο φοιτητής/τρια χρεωθεί περισσότερες από μία απουσίες (ανεξάρτητα από ποιο κύκλο τις έχασε), **επαναλαμβάνει όλο το Εργαστήριο το επόμενο έτος**.

**ΑΝΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ:** Σε περίπτωση μη καλής λειτουργίας των οργάνων και/ή για κάθε άλλο πρόβλημα οι φοιτητές/τριες απευθύνονται **άμεσα** στον διδάσκοντα, ο οποίος, ή επιλύει το πρόβλημα, ή καλεί τα μέλη ΕΤΕΠ (Ηλεκτρονικοί Μηχανικοί στο Παρασκευαστήριο).

**ΠΡΟΣΟΧΗ! Δεν επιτρέπεται το κάπνισμα και τα τρόφιμα κλπ. στις αίθουσες και στους διαδρόμους των Εργαστηρίων.**

---

# Β. Ειδικοί Κανόνες

## Εργαστήριο Φυσικής Ι

- Ειδικό εισαγωγικό Εργαστήριο 1ου εξαμήνου
- Τέσσερις δίωρες Εισαγωγικές Διαλέξεις στο Αμφιθέατρο Αρίσταρχος
- Μία εισαγωγική άσκηση εφαρμογής της θεωρίας σφαλμάτων από τις Διαλέξεις (Α1).
- Δύο βασικές εργαστηριακές ασκήσεις για το τρόπο διεξαγωγής της πειραματικής μέτρησης και τα λογισμικά εργαλεία για την λήψη και την επεξεργασία των μετρήσεων (Α2 και Α3)

- Γραπτή δίωρη εξέταση σε όλη την παραπάνω ύλη και βαθμός 1$^{ου}$ κύκλου
- Τρεις ασκήσεις (Α4, Α5 και Α6) σε κυκλική σειρά που σχετίζονται: (α) με χρήση νέων τεχνολογιών στις μετρήσεις (αισθητήρες, διεπαφές, Η/Υ και κατάλληλο λογισμικό), (β) βασική εξοικείωση με θέματα ηλεκτρισμού, κυκλωμάτων και αντίστοιχης οργανολογίας και (γ) μέτρηση διαστάσεων αντικειμένων, όγκου αυτών, μάζας και προσδιορισμό πυκνοτήτων, με χρήση παχυμέτρων και μικρομέτρων, καταλλήλων ζυγών μάζας και άνωσης σωμάτων, με υπολογισμό συνθέτων σχετικών σφαλμάτων με την μέθοδο της διάδοσης σφάλματος
- Ασκούνται δύο φοιτητές ανά διάταξη.
- Η διάρκεια κάθε άσκησης είναι 2.5h.

## Εργαστήριο Φυσικής ΙΙ

- Θεματικό περιεχόμενο κυρίως η Μηχανική και η Θερμοδυναμική.
- Δύο κύκλοι των τεσσάρων ασκήσεων έκαστος.
- Ασκούνται δύο φοιτητές ανά διάταξη.
- Η διάρκεια κάθε άσκησης είναι 2.5h.

## Εργαστήριο Φυσικής ΙΙΙ

- Θεματικό περιεχόμενο η Θερμοδυναμική και κυρίως η Κυματική-Οπτική.
- Δύο κύκλοι των τεσσάρων ασκήσεων έκαστος.
- Ασκούνται δύο φοιτητές ανά διάταξη.
- Η διάρκεια κάθε άσκησης είναι 2.5h.

## Εργαστήριο Φυσικής IV

- Θεματικό περιεχόμενο ο Ηλεκτρομαγνητισμός και η Σύγχρονη Φυσική.
- Δύο κύκλοι των τεσσάρων ασκήσεων έκαστος.
- Ασκούνται δύο φοιτητές ανά διάταξη.
- Η διάρκεια κάθε ασκήσεως είναι 2h.

## Εργαστήριο Φυσικής Τμήματος Γεωλογίας

- Μία εισαγωγική άσκηση εφαρμογής της θεωρίας σφαλμάτων.
- Δύο κύκλοι των τριών ασκήσεων έκαστος.
- Ασκούνται δύο φοιτητές ανά διάταξη.
- Η διάρκεια κάθε άσκησης είναι 2h.

## Εργαστήριο Φυσικής Τμήματος Βιολογίας

- Μία εισαγωγική άσκηση εφαρμογής της θεωρίας σφαλμάτων.
- Δύο κύκλοι των τριών ασκήσεων έκαστος.
- Ασκούνται δύο φοιτητές ανά διάταξη.
- Η διάρκεια κάθε άσκησης είναι 1.5h.

# Άλλες Πληροφορίες για το Εργαστήριο Φυσικής

Το Εργαστήριο Φυσικής βρίσκεται στο Ισόγειο της Δυτικής πτέρυγας του Κτηρίου IV, δεξιά των εισερχομένων στην κυρία είσοδο του Τμήματος Φυσικής.

Το Εργαστήριο Φυσικής είναι το μεγαλύτερο εκπαιδευτικό εργαστήριο του Πανεπιστημίου Αθηνών και μία από τις μεγαλύτερες εκπαιδευτικές μονάδες της χώρας. Υπάγεται διοικητικώς στο Τμήμα Φυσικής, το οποίο εκλέγει τον Διευθυντή και τον Αναπληρωτή Διευθυντή του Εργαστηρίου Φυσικής και το στελεχώνει με διδακτικό, διοικητικό και τεχνικό προσωπικό.

Το Εργαστήριο Φυσικής σήμερα εκπαιδεύει κάθε ακαδημαϊκό έτος συνολικά πάνω από 800 φοιτητές (Α, Β, Γ και Δ εξάμηνο του Τμήματος Φυσικής, καθώς και στο Α εξάμηνο των Τμημάτων Βιολογίας και Γεωλογίας). Στην εκπαιδευτική αυτή διαδικασία εμπλέκονται μέλη ΔΕΠ του Τμήματος Φυσικής, μεταπτυχιακοί φοιτητές, μεταδιδακτορικοί ερευνητές και το προσωπικό του Εργαστηρίου.

Στο Εργαστήριο Φυσικής υπάγεται το Μηχανουργείο του Τμήματος, στο οποίο πραγματοποιούνται κατασκευές, απαραίτητες τόσο για την λειτουργία του Εργαστηρίου, όσο και για διάφορες ερευνητικές δραστηριότητες του Τμήματος.

Το Εργαστήριο Φυσικής δίνει επίσης την δυνατότητα εκπόνησης διπλωματικών εργασιών (Ειδικό Θέμα), κυρίως στην Εκπαίδευση, με θέματα που αφορούν στην Διδακτική της Φυσικής και ιδιαιτέρως στον ρόλο της εργαστηριακής εκπαίδευσης. Άλλωστε στους τομείς αυτούς εκπονούνται και ερευνητικά έργα με τα προαναφερθέντα θεματικά περιεχόμενα.

# Ασφάλεια στο Εργαστήριο Φυσικής

Σε κάθε Εργαστηριακό χώρο ισχύουν μερικοί απλοί και αποτελεσματικοί κανόνες που σκοπό έχουν την αποφυγή ατυχημάτων ή τις φθορές εξοπλισμού και την παροχή βοήθειας σε περίπτωση ανάγκης.

Επισημαίνουμε ότι οι κύριοι κίνδυνοι στο Βασικό Εργαστήριο ΦΥΣΙΚΗΣ I, II, III και IV, πηγάζουν από την **φωτιά, τον ηλεκτρισμό** και την **χρήση ειδικών υλικών**. Σε κάθε περίπτωση οι Επιβλέποντες και το προσωπικό του Εργαστηρίου θα σας βοηθήσουν όπου χρειαστεί.

Η δομή των χώρων του Εργαστηρίου είναι απλή· υπάρχουν δύο έξοδοι στα αντίστοιχα δύο άκρα του διαδρόμου του εργαστηρίου. **Αν χρειασθεί να γίνει εκκένωση των χώρων κινούμαστε αντίστοιχα προς την κατάλληλη ασφαλή έξοδο**.

## Ασθένεια - ατύχημα

Είναι δυνατόν κάποιος από εσάς να αρρωστήσει και να αισθανθεί άσχημα ή ακόμα και να πάθει ένα μικρό ατύχημα κλπ.. Ανάλογα με την περίπτωση η βοήθεια από τον Επιβλέποντα, η μεταφορά στο Ιατρείο της Πανεπιστημιούπολης (**Τηλ. 210 7277873**) ή η κλήση ασθενοφόρου στο 166 **(διευκρινίζοντας που ακριβώς ευρίσκεται το άτομο)**, είναι κάτι που πρέπει να σταθμιστεί άμεσα και ανάλογα.

Η συνδρομή του ίδιου του ασθενούς με πληροφόρηση, ειδοποίηση οικείου προσώπου αν χρειαστεί ή πληροφόρηση από φίλου/ης είναι επίσης ουσιαστική για την γρηγορότερη ανακούφιση του.

Επίσης, έξω από το Γραφείο των Ηλεκτρονικών Μηχανικών του Εργαστηρίου (Παρασκευαστήριο) υπάρχει ένα μικρό φαρμακείο εξοπλισμένο με τα βασικά για την παροχή πρώτων βοηθειών.

**http://www.redcross.gr**

## Ηλεκτρισμός

Στα κυκλώματα των ασκήσεων του Εργαστηρίου χρησιμοποιούνται χαμηλές τάσεις. Παρόλο που ο κίνδυνος ηλεκτροπληξίας είναι σαφώς μικρότερος του αντίστοιχου που έχουμε στο σπίτι μας, είναι απαραίτητη η προσοχή μας ιδίως στην σύνδεση οργάνων στο δίκτυο. Ποτέ δεν βάζουμε στη πρίζα ένα κύκλωμα πριν ο Επιβλέπων το ελέγξει. **Ποτέ δεν βάζουμε στη πρίζα ένα κύκλωμα πριν ο** Επιβλέπων **το ελέγξει!**

**Σε περίπτωση ηλεκτροπληξίας θα πρέπει πρώτα να αποκόπτεται το ρεύμα από τους ασφαλειοδιακόπτες** που είναι κατανεμημένοι κοντά στις παροχές· αν αυτό δεν είναι εφικτό, τότε **πρέπει να απομακρύνεται το άτομο με κατάλληλο μονωτικό υλικό (π.χ. ένα στεγνό ρούχο)**. Ο χρόνος εδώ είναι βασικό στοιχείο. Άμεσα θα πρέπει να γίνει κλήση για ασθενοφόρο στο 166 περιγράφοντας το τι έχει συμβεί και **που ακριβώς ευρίσκεται το άτομο**. Η **επαγγελματική** γνώση τεχνητής αναπνοής μπορεί σε κάποια σοβαρή περίπτωση να σώσει ζωή.

**http://www.electronics-lab.com/articles/files/electric_shock.pdf**

## Ραδιενέργεια

**Χρήση ραδιενεργών πηγών:** Η χρήση των ειδικών στην εκπαίδευση ραδιενεργών πηγών γίνεται με τις κατάλληλες οδηγίες του Διδάσκοντα. Θα τις χρησιμοποιήσετε στο Εργαστήριο Φυσικής II και αργότερα στο Εργαστήριο της Πυρηνικής Φυσικής. Στα Εργαστήρια Φυσικής ο φοιτητής πρέπει να υπογράψει σε κατάλληλο φύλλο την παραλαβή και μετά την χρήση, αντίστοιχα για την επιστροφή της πηγής στο Παρασκευαστήριο.

Οι πηγές αυτές είναι ασφαλείς. Ωστόσο δεν πρέπει να τις χειριζόμαστε χωρίς λόγο, να κοιτάζουμε από κοντά την έξοδο των σωματιδίων ή να τις τοποθετούμε έτσι ώστε τα σωματίδια να κατευθύνονται σε μάς ή στους συμφοιτητές μας. **Ποτέ** δεν τις κρατούμε με τα δάχτυλα στο **«παράθυρο»** της πηγής. Σε περίπτωση που δείτε ότι το ειδικό προστατευτικό παράθυρο είναι χαραγμένο ή σπασμένο να το αναφέρετε αμέσως στον Επιβλέποντα. Αστειότητες με τις ραδιενεργές πηγές συνεπάγεται άμεση διαγραφή από το Εργαστήριο.

**http://www.eeae.gr**

## Ακτινοβολίες Laser

**Χρήση συσκευών παραγωγής Laser:** Οι συσκευές παραγωγής ακτινών Laser χρησιμοποιούνται στα νέα Εργαστήρια Φυσικής II, III και IV. **Απαγορεύεται** να κατευθύνουμε την δέσμη τους στα μάτια μας είτε στα μάτια κάποιου συνάδελφου. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται ώστε να μη συμβεί αυτό και από ισχυρή ανάκλαση της δέσμης από ιδιαίτερα στιλπνή επιφάνεια ή καθρέπτη. Ο Επιβλέπων θα σας δώσει οδηγίες για την ασφαλή χρήση του laser του πειράματός σας.

**http://www.osha.gov/SLTC/etools/eyeandface/ppe/laser_safety.html**

## Υλικά

**Χρήση υγρού αζώτου:** Το υγρό άζωτο ($LN_2$) βρίσκεται (σε ατμοσφαιρική πίεση) σε θερμοκρασία -196$^{o}$C!! Διατηρείται και μεταφέρεται μέσα σε ειδικά θερμομονωτικά δοχεία (δοχεία Dewar – παρόμοια με τα γνωστά μας "θερμός"). **Κατά την διαδικασία ενός πειράματος με υγρό άζωτο ακολουθείτε τις οδηγίες του** Επιβλέποντα **αποφεύγοντας απότομες κινήσεις που θα οδηγούσαν στο να χυθεί ποσότητα $LN_2$ πάνω σας**. Η δράση του αν πέσει μεγάλη ποσότητα πάνω σας είναι σαν να έχετε πάθει ένα έγκαυμα. Στα ρούχα επιφέρει μερική καταστροφή. Αν από ατύχημα πάθετε έγκαυμα θα πρέπει να ειδοποιηθεί το 166 (**διευκρινίζοντας που ακριβώς βρίσκεται το άτομο**) Ασθενοφόρο για την παροχή επαγγελματικής και υπεύθυνης βοήθειας.

**http://www.matheson-trigas.com/msds/00202589.pdf**

## Πυρκαγιά

Να θυμάστε ότι για να έχουμε φωτιά, χρειάζεται να συνυπάρχουν 3 προϋποθέσεις **(α) το κατάλληλο εύφλεκτο υλικό (β) το οξυγόνο και (γ) η υψηλή θερμοκρασία**. Όταν έστω και ένας από τους παραπάνω 3 παράγοντες δεν υπάρχει τότε δεν έχουμε φωτιά. Ειδικά πρέπει να προσέχουμε τα εύφλεκτα υλικά (π.χ. οινόπνευμα). Φυσικά οι δύο πρώτοι παράγοντες πάντα υπάρχουν, άρα ο τρίτος είναι ο κύριος κίνδυνος ώστε να εκδηλωθεί φωτιά στο εργαστήριο.

Αν απομακρύνουμε έναν από τους τρεις αυτούς παράγοντες τότε η φωτιά θα σβήσει. Στο χώρο του Εργαστηρίου, λόγω της ύπαρξης ηλεκτρικού ρεύματος, απομακρύνουμε το οξυγόνο από την φωτιά με την χρήση των ειδικών πυροσβεστήρων. Υπάρχουν πολλοί πυροσβεστήρες κατάλληλου τύπου ($CO_2$) που μπορούν να χρησιμοποιηθούν με παρουσία ηλεκτρικού ρεύματος.

**Να θυμάστε ότι το πυροσβεστικό υλικό για να έχει αποτελεσματικότητα θα πρέπει να κατευθύνεται στη βάση της φωτιάς** (όπου γίνεται η καύση του υλικού) και ότι ο χρόνος εκροής από ένα πυροσβεστήρα είναι ~30- 40 δευτερόλεπτα **μόνο**!

Ακόμη μία καλά βρεγμένη (προσοχή να μην χρησιμοποιείται τίποτα το βρεγμένο αν η φωτιά είναι συνδυασμένη με υπό τάση συσκευή) πετσέτα ή ρούχο αποτελούν έναν απλό και αποτελεσματικό τρόπο κατάσβεσης πυρκαγιάς σε αρχικό στάδιο.

Να θυμάστε επίσης ότι **ο χρόνος** είναι ουσιαστικό στοιχείο της αντιμετώπισης μιας πυρκαγιάς. Οι πυροσβέστες, για να τονίσουνε το θέμα της άμεσης αντίδρασης σε περίπτωση φωτιάς, αναφέρουνε μισοσοβαρά – μισοαστεία ότι «το πρώτο λεπτό η φωτιά σβήνει με …ένα ποτήρι νερό, το 5' με πυροσβεστήρα και μετά από 15-20 λεπτά μόνο με παρέμβασή τους!». Προφανώς άμεση πρέπει να είναι, εφόσον απαιτείται, και η κλήση της Πυροσβεστικής Υπηρεσίας στο 199, προσδιορίζοντας με ακρίβεια τόπο και ειδικές συνθήκες / υλικά στο χώρο της φωτιάς.

**http://www.fireservice.gr**

## Σεισμός

Ισχύουν οι γενικές οδηγίες του Οργανισμού Αντισεισμικού Σχεδιασμού και Προστασίας προς τον πληθυσμό. Την ώρα του σεισμού καλυφθείτε αμέσως κάτω από μία εργαστηριακή έδρα (πάγκο) και απομακρυνθείτε από τζαμαρίες και βαριές οργανοθήκες. Μη τρέξετε προς την έξοδο. Μετά το πέρας του σεισμού, αν χρειάζεται, εξέρχεστε χωρίς πανικό από το κτίριο και αν υπάρχει ανάγκη βοηθείας προς άλλα άτομα, προσπαθείτε να την προσφέρετε στο μέτρο του δυνατού. Καλέστε ασθενοφόρο, εφόσον απαιτείται. Καταφύγετε στην συνέχεια σε ανοικτό ασφαλή χώρο, είτε προς την πλευρά του Κοιμητηρίου Ζωγράφου, είτε προς το ανοικτό μέρος της Φιλοσοφικής Σχολής, είτε προς τον ανοικτό χώρο σταθμεύσεως της Σχολής Θετικών Επιστημών.

**http://www.oasp.gr/defaultflash.htm**

## Ιοί - Γρίπη

Οδηγίες σχετικά με την κοινή γρίπη:
**http://www.keel.org.gr/keelpno/2009/id994/afisa_mv.pdf**

ΠΡΟΣΟΧΗ: Προστατεύστε τον εαυτό σας και τους γύρω σας από την γρίπη. Μη διασπείρετε τα μικρόβια: Καλύψτε το στόμα και την μύτη σας με χαρτομάντιλο, όταν βήχετε ή φταρνίζεστε. Πετάξτε αμέσως το χαρτομάντιλο στο καλάθι των απορριμμάτων. Αν δεν έχετε χαρτομάντιλο; Φταρνιστείτε στον αγκώνα σας και όχι στα χέρια σας. Πλύνετε τα χέρια σας με σαπούνι και νερό ή χρησιμοποιήστε αλκοολούχο αντισηπτικό διάλυμα. Μην αγγίζετε τα μάτια, την μύτη και το στόμα σας.

Υπουργείο Υγείας & Κοινωνικής Αλληλεγγύης, Κέντρο Ελέγχου & Πρόληψης Νοσημάτων (ΚΕ.ΕΛ.Π.ΝΟ.) http://www.keel.org.gr

Πληροφορίες για την νέα γρίπη Α (Η1Ν1) στον ιστοχώρο του Πανεπιστημίου Αθηνών: **http://www.uoa.gr/h1n1/ και στην τηλεφωνική γραμμή: 210-3689797**

## Ιός του Δυτικού Νείλου

Πληροφορίες κλπ. Για την λοίμωξη από τον ιό του Δυτικού Νείλου: Τι είναι, πώς μεταδίδεται, ποια τα συμπτώματα, ποια η θεραπεία, πώς αποφεύγεται η μόλυνση, στην διεύθυνση:

**http://news.in.gr/files/1/2010/WNV.pdf**

# 0. Μετρήσεις, αβεβαιότητες, σφάλματα, στρογγυλοποιήσεις, γραφήματα

## Σκοπός της άσκησης

Πρακτικός οδηγός με τις εισαγωγικές έννοιες στην πειραματική διαδικασία. Επεξεργασία πειραματικών μετρήσεων, καταγραφή και συνεκτίμηση της αβεβαιότητας για την κάθε μέτρηση. Ασκήσεις επί χάρτου στην εργαστηριακή αίθουσα σε στατιστικά μεγέθη, όπως Μέση τιμή, Απόκλιση. Υπολογισμοί σφάλματος μεγεθών. Σχεδίαση γραφικών παραστάσεων, χάραξη και προσαρμογή καμπυλών. Εξοικείωση και εξάσκηση με τις έννοιες και υπολογισμούς.

**Λέξεις κλειδιά**: Μέτρηση, Αβεβαιότητα, Μέση τιμή, Τυπική απόκλιση, Τυπική απόκλιση μέσης τιμής, Διασπορά, Διάδοση σφαλμάτων, Σφάλμα, Σχετικό σφάλμα, Χάραξη καμπύλης, Προσαρμογή καμπύλης

## Στοιχεία από την θεωρία (μετρήσεις, μεγέθη, αβεβαιότητες, σφάλματα)

Στην επιστήμη, **μέτρηση** είναι η σύγκριση της ποσότητας κάποιου φυσικού μεγέθους με ένα πρότυπο, δηλαδή σύγκριση με κάποια σταθερή ποσότητα του ίδιου φυσικού μεγέθους που αυθαίρετα έχει συμφωνηθεί (κατά "σύμβαση", δηλαδή κατά κοινή συμφωνία) να χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης.

Τα **μεγέθη** είναι ποσότητες που αντιστοιχούν σε φυσικά φαινόμενα. Τα μεγέθη χωρίζονται σε μονόμετρα και διανυσματικά. Τα μονόμετρα είναι τα μεγέθη που για να οριστούν χρειάζονται μόνο ένα αριθμό και μια μονάδα μέτρησης. Τα διανυσματικά απαιτούν κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά), μέτρο και σημείο εφαρμογής. Για παράδειγμα ορισμένα μονόμετρα μεγέθη είναι η μάζα, ο χρόνος, η θερμοκρασία και το ηλεκτρικό φορτίο, ενώ ορισμένα διανυσματικά είναι η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η μετατόπιση. Τα μεγέθη μπορούν να χωριστούν σε συνεχή και διακριτά.

Τα **θεμελιώδη** φυσικά μεγέθη είναι ένα ελάχιστο σύνολο από φυσικά μεγέθη τα οποία θεωρούνται εντελώς ανεξάρτητα μεταξύ τους και τα οποία είναι ικανά να ορίσουν όλα τα υπόλοιπα (παράγωγα) μεγέθη που μπορεί να χρειαστούν και χρησιμοποιούνται από την φυσική για την περιγραφή οποιουδήποτε φυσικού φαινομένου.

**Συστήματα μονάδων μέτρησης**. Ιστορικά οι άνθρωποι δημιούργησαν και χρησιμοποίησαν πολλά συστήματα μονάδων μέτρησης, αρχικά για την μέτρηση των αποστάσεων και για την μέτρηση ποσοτήτων όπως η μάζα (το βάρος) και ο όγκος για εμπορικούς και παρόμοιους σκοπούς. Από το 1960 έχει καθιερωθεί και ισχύει παγκοσμίως το σύστημα SI (Système Internationale), το οποίο περιλαμβάνει επτά θεμελιώδεις μονάδες (βλ. πίνακα). Όλα τα άλλα φυσικά μεγέθη θεωρούνται παράγωγα και κάθε μονάδα μέτρησης τέτοιου μεγέθους μπορεί πάντα να εκφραστεί ως συνάρτηση των θεμελιωδών μονάδων. (ενδεικτικά βλ. πίνακα).

| Θεμελιώδη μεγέθη | Σύμβολα | Παράγωγα μεγέθη | Σύμβολα |
|---|---|---|---|
| Μήκος | 1 m | Ενέργεια | 1 J |
| Μάζα | 1 kg | Ισχύς | 1 W |
| Χρόνος | 1 s | Πίεση | 1 $N/m^2$ |
| Θερμοκρασία | 1 K | Εμβαδόν | 1 $m^2$ |
| Ποσότητα ύλης | 1 mole | Όγκος | 1 $m^3$ |
| Ένταση ηλ. ρεύματος | 1 A | Πυκνότητα | 1 $kg/m^3$ |
| Ένταση ακτινοβολίας | 1 cd | | |

**Η ορολογία** που σχετίζεται με την πειραματική αβεβαιότητα δεν χρησιμοποιείται πάντα με την ίδια σαφήνεια και συνέπεια. Στη συνέχεια παρατίθενται αρκετοί από τους βασικούς όρους, για να αναδειχτεί η σημασία των όρων αυτών και το εύρος του νοήματός τους. Οι ορισμοί έχουν ληφθεί από ένα σύνολο αναφορών που αντιπροσωπεύουν την θεματική ενότητα της ανάλυσης σφαλμάτων (error analysis).

**Μετρούμενο Μέγεθος** (measurand). Μια συγκεκριμένη ποσότητα που υπόκειται σε μέτρηση

**Μέτρηση** (measurement). Η τιμή που προκύπτει από μια προσέγγιση ή εκτίμηση μιας ποσότητας, ή την διαδικασία προσέγγισης ή εκτίμησης μιας ποσότητας

**Πραγματική τιμή μιας ποσότητας** (true value of a quantity). Τιμή που είναι συνεπής με τον ορισμό μιας συγκεκριμένης ποσότητας. Η πραγματική τιμή είναι εκ φύσεως **απροσδιόριστη**, και με τον όρο αυτό εννοούμε μια τιμή που θα παίρναμε από την τέλεια μέτρηση. Αποτελεί την τιμή που **προσεγγίζεται** από ένα μεγάλο αριθμό μετρήσεων χωρίς συστηματικά σφάλματα.

**Μέση τιμή** (mean value). Είναι βάσει της πιθανότητας ο σταθμισμένος μέσος όρος ενός συνόλου τιμών ή μιας κατανομής πιθανοτήτων. Η μέση τιμή καλείται επίσης αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής. Για πλήθος μετρήσεων N και i=1,…,N, υπολογίζεται από την σχέση:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

**Διακύμανση** (variance). Το μέτρο της διασποράς ή μεταβλητότητας ενός συνόλου δεδομένων $x_i$, i=1,…,N, με την μορφή της μέσης τιμής των τετραγωνικών αποκλίσεων των δεδομένων από την μέση τιμή τους. Όταν τα δεδομένα καλύπτουν το σύνολο του πληθυσμού, η διακύμανση υπολογίζεται από την σχέση:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

Όταν το σύνολο των δεδομένων είναι μόνο ένα υποσύνολο του πληθυσμού, η διακύμανση καλείται διακύμανση δείγματος και εκτιμάται καλύτερα από την σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

**Τυπική Απόκλιση** (standard deviation). Το μέτρο της διασποράς (σκέδασης) των δεδομένων που υπολογίζεται από την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσής τους. Έτσι, η τυπική απόκλιση για το σύνολο του πληθυσμού υπολογίζεται από την σχέση:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

και η τυπική απόκλιση δείγματος (sample standard deviation) δίνεται από την σχέση:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

**Τυπικό σφάλμα** (standard error) (Τυπική απόκλιση της μέσης τιμής - standard deviation of mean value). Η τυπική απόκλιση μιας στατιστικής συνάρτησης, εδώ της μέσης τιμής. Το τυπικό σφάλμα ορίζεται δηλαδή ως η τυπική απόκλιση δείγματος διαιρούμενη με το πλήθος των δεδομένων, και επομένως δίνεται από την σχέση:

$$SE = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N\left(N-1\right)}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

**Σφάλμα μέτρησης** (error of measurement). Η διαφορά ανάμεσα σε μια μέτρηση και την (άγνωστη) πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους.

**Αβεβαιότητα μέτρησης** (uncertainty of measurement). Η απουσία τελείως τεκμηριωμένης γνώσεως. Είναι μια παράμετρος που σχετίζεται με το αποτέλεσμα μιας μέτρησης, και χαρακτηρίζει την διασπορά των τιμών που θα μπορούσαν λογικά να αποδοθούν στο μετρούμενο μέγεθος. Η αβεβαιότητα περιλαμβάνει γενικά πολλές συνιστώσες οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν από τις πειραματικές τυπικές αποκλίσεις που βασίζονται σε επαναλαμβανόμενες παρατηρήσεις (Τύπου Α εκτίμηση) ή από τις τυπικές αποκλίσεις που υπολογίζονται από κατανομές πιθανοτήτων βάσει εμπειρίας ή άλλης πληροφορίας (Τύπου Β εκτίμηση). Ο όρος αβεβαιότητα προτιμάται σε σχέση με τον όρο σφάλμα μέτρησης επειδή ο δεύτερος δεν μπορεί ποτέ να είναι γνωστός (ISO, 34).

Μια εκτίμηση του σφάλματος σε μια μέτρηση, που δίνεται συχνά ως ένα εύρος τιμών που περιέχει την πραγματική τιμή μέσα σε ένα διάστημα εμπιστοσύνης (συνήθως το ± 1 s για 68% C.L.-επίπεδο εμπιστοσύνης) που βασίζεται είτε στους περιορισμούς που θέτουν τα όργανα μέτρησης είτε στις στατιστικές διακυμάνσεις του μετρούμενου μεγέθους.

**Απόλυτη αβεβαιότητα** (absolute uncertainty). το ποσό (συχνά με την μορφή ± δx) που μαζί με την μετρούμενη τιμή, υποδεικνύει το εύρος στο οποίο είναι περισσότερο πιθανό να βρίσκεται η πραγματική τιμή

**Σχετική αβεβαιότητα** (relative (fractional) uncertainty). Η απόλυτη αβεβαιότητα διαιρούμενη με την μετρούμενη τιμή, που συνήθως εκφράζεται σαν ποσοστό ή σε parts per million (ppm).

**Τυπική αβεβαιότητα** (standard uncertainty). Η αβεβαιότητα του αποτελέσματος μιας μέτρησης που εκφράζεται ως μια τυπική απόκλιση.

**Ακρίβεια** (precision). Ο βαθμός της συνέπειας και της συμφωνίας ανάμεσα σε ανεξάρτητες μετρήσεις μιας ποσότητας κάτω από της ίδιες συνθήκες.

*Η ακρίβεια αποτελεί ένα μέτρο του πόσο καλά έχει προσδιοριστεί ένα αποτέλεσμα (χωρίς καμιά αναφορά σε μια θεωρητική ή πραγματική τιμή), και της εργαστηριακής επαναληπτικότητας ενός αποτελέσματος. Η καταλληλότητα της κλίμακας μιας συσκευής μέτρησης επηρεάζει γενικά την συνέπεια των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, ως εκ τούτου και η χρήση του όρου ακρίβεια. Εντούτοις, και σύμφωνα με τα ISO δεν συνίσταται η χρήση του όρου για την περιγραφή επιστημονικών οργάνων μέτρησης λόγω της ευρείας χρήσης του όρου στην καθομιλουμένη.*

**Ορθότητα/ακρίβεια μέτρησης** (accuracy of measurement). Είναι η εγγύτητα ή συμφωνία ανάμεσα σε μια μετρούμενη και την πραγματική τιμή.

**Τυχαίο Σφάλμα** (random error). Σφάλμα που προκύπτει κατά την καταγραφή μιας πραγματικής τιμής x ως x+ε, όπου ε είναι οι παρατηρούμενες τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής. Όταν η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής ε είναι μηδέν, λέμε ότι το σφάλμα είναι αμερόληπτο (unbiased). Συγκρίνετε με το Συστηματικό σφάλμα.

**Συστηματικό Σφάλμα** (systematic error). Η διαφορά ανάμεσα στην πραγματική τιμή μιας ποσότητας και την τιμή στην οποία συγκλίνει η μέση τιμή επαναλαμβανόμενων μετρήσεων καθώς παίρνουμε όλο και περισσότερες μετρήσεις. Είναι το σφάλμα που προκύπτει όταν το αποτέλεσμα μέτρησης μιας ποσότητας της οποίας η τιμή είναι **x** φαίνεται να είναι της μορφής **f(x)**, όπου **f** είναι μια συγκεκριμένη συνάρτηση.

**Σχετικό σφάλμα** (relative error). Το σφάλμα μιας μέτρησης διαιρούμενο με την πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Το σχετικό σφάλμα αναφέρεται συνήθως σαν ποσοστό. Στη θέση της πραγματικής (άγνωστης) τιμής χρησιμοποιούμε την μέση τιμή δηλαδή παίρνουμε το σχετικό σφάλμα της μέσης τιμής.

**Σημαντικά ψηφία** (significant figures). Όλα τα ενδιάμεσα ψηφία συμπεριλαμβανομένου του πρώτου μη μηδενικού ψηφίου από τα αριστερά, έως το τελευταίο ψηφίο (π.χ. ο αριθμός *0.06310 έχει 4 σημαντικά ψηφία.*)

**Δεκαδικές θέσεις** (decimal places). ο αριθμός των ψηφίων στα δεξιά της δεκαδικής υποδιαστολής.

## Μέση τιμή, τυπική απόκλιση, σφάλματα

Παραθέτουμε τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες έννοιες και σχέσεις σε μια πειραματική μας μέτρηση. Έστω η ποσότητα **x** που μετρούμε **N** φορές και λαμβάνουμε τιμές **$x_i$** (**$x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_N$**). Τότε η τιμή που βρίσκεται πιο κοντά στην "πραγματική" είναι η ***μέση τιμή*** που δίδεται όπως είδαμε από την σχέση:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1}$$

Όμως δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το αποτέλεσμά μας συμπίπτει με την (άγνωστη) "πραγματική" τιμή. Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε το σφάλμα, δηλαδή μια περιοχή τιμών του **x** όπου εντός της εντοπίζεται αυτή η πραγματική τιμή. Δηλαδή:

$$x = \bar{x} \pm \delta\bar{x} \tag{2}$$

Το $\delta\bar{x}$ με την απαίτηση η πραγματική τιμή να εντοπίζεται στο παραπάνω δείγμα με πιθανότητα 68%, υπολογίζεται ως η **τυπική απόκλιση της μέσης τιμής** από την σχέση:

$$\delta\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \tag{3}$$

όπου σ είναι η **τυπική απόκλιση** του δείγματος:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \tag{4}$$

**Στρογγυλοποιήσεις** και σημαντικά ψηφία. **Λαμβάνουμε υπόψη την ακρίβεια** των χρησιμοποιούμενων μεθόδων και οργάνων, εφαρμόζοντας τον εξής κανόνα: Από την πιθανότερη (μέση) τιμή και το σφάλμα, στρογγυλοποιούμε το σφάλμα μέχρι να μάς μείνει ένα ψηφίο, το μεγαλύτερο, που είναι διάφορο του μηδενός (ένα σημαντικό ψηφίο). Στην συνέχεια, στην πιθανότερη (μέση) τιμή αφήνουμε τελευταίο το ψηφίο της ίδιας τάξης μεγέθους κάνοντας κι εδώ στρογγυλοποίηση. Αν το ψηφίο το σφάλμα είναι το 1 ή το 2 κρατάμε (αντίστοιχα) και ένα επιπλέον ψηφίο στο σφάλμα και στη μέση τιμή.

**Κανόνες στρογγυλοποιήσεων** για κάποιον αριθμό, εντοπίζοντας το σημαντικό (υπό στρογγυλοποίηση) ψηφίο που μας ενδιαφέρει και εξετάζοντας το αμέσως επόμενο ψηφίο (δεξιά): **[i]** Αν αυτό είναι μεγαλύτερο ή ίσο με 5, αυξάνουμε το σημαντικό ψηφίο κατά μία μονάδα και παραλείπουμε τα υπόλοιπα. (για δύο δεκαδικά, το 2.365 γίνεται 2.37). **[ii]** Αν αυτό είναι μικρότερο από 5, αφήνουμε το σημαντικό ψηφίο όπως είναι και παραλείπουμε τα υπόλοιπα. (για τρία δεκαδικά, το 3.8763 γίνεται 3.876).

**Σχετικό σφάλμα** ονομάζεται ο λόγος $\eta = \delta\bar{x}/\bar{x}$ , καθαρός αριθμός, αποδίδεται σε ποσοστά. Έτσι λοιπόν ένα σφάλμα θεωρείται μικρό αν **η**~5%, ενώ μεγάλο αν **η**>10%. Τούτο βεβαίως ισχύει αν το σφάλμα ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις των πειραματικών στόχων. Δηλαδή αν έχουμε την ακρίβεια που απαιτείται στο συγκεκριμένο πείραμα.

**Διάδοση σφαλμάτων**. Συχνά στις εκπαιδευτικές εργαστηριακές ασκήσεις, αλλά και στα ερευνητικά πειράματα, η άμεση μέτρηση κάποιων μεγεθών χρησιμεύει στον έμμεσο υπολογισμό κάποιων άλλων με την χρήση γνωστών τύπων. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα **λ = f(x,y,z,...)** όπου τα μεγέθη **x,y,z,...** έχουν σφάλματα αντίστοιχα **δx, δy, δz,...** Τότε ισχύει:

$$\delta\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}dx\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}dy\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}dz\right)^2 + \dots} \tag{5}$$

όπου $\partial\lambda/\partial x$ η **μερική παράγωγος** της συνάρτησης **λ** ως προς **x.** *Δηλαδή για να υπολογίσουμε την* $\partial\lambda/\partial x$ *παραγωγίζουμε κανονικά την συνάρτηση λ ως προς x θεωρώντας όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους (y, z κλπ) σαν σταθερές κ.ο.κ. για τις υπόλοιπες μερικές παραγώγους.*

## Συνοπτικές αρχές σχεδιάσεως γραφημάτων

Είναι σημαντικό να ακολουθούνται οι παρακάτω απλοί κανόνες στη σχεδίαση γραφημάτων:

- Επιλέγεται ποιος συγκεκριμένος άξονας θα αποδίδει έκαστο μέγεθος.
- Επιλέγεται κατάλληλο εύρος τιμών για κάθε άξονα, όχι απαραιτήτως ίδια για κάθε γράφημα, ώστε να γίνεται με την σχεδίαση του γραφήματος εκμετάλλευση όλου του χώρου, για την καλύτερη αναγνωσιμότητα των σημείων και καμπυλών. Σύνηθες μέγεθος είναι περίπου A5 (μισό A4).
- Η τομή των αξόνων δεν είναι κατ' ανάγκη το (0,0), αλλά όποιο ορίζει καλύτερα το πεδίο τιμών του μεγέθους που μετρούμε.
- Σημειώνονται πρώτα τα χαρακτηριστικά των αξόνων: μεγέθη, μονάδες, φορά τιμών αξόνων και κλίμακα.
- Χρησιμοποιείται ημιλογαριθμικό χαρτί για παρουσίαση αποτελεσμάτων με μεγάλο δυναμικό εύρος (δηλ. οι τιμές που τα χαρακτηρίζουν έχουν διακύμανση σε πολλές τάξεις μεγέθους) ή για μη γραμμικά γραφήματα όπως $y=y(x^n)$ όπου η συνάρτηση εμφανίζεται σαν ευθεία με κλίση που εμπεριέχει την δύναμη *n*.
- Κάθε σημείο (x,y) σχεδιάζεται με την αβεβαιότητα που το συνοδεύει (δx, δy). Δεν χαράσσονται βοηθητικές παράλληλες με τους άξονες, ούτε σημειώνονται οι τιμές στους άξονες.
- Χαράσσεται ομαλή καμπύλη που συνάδει με την θεωρία και όχι τεθλασμένες γραμμές.
- Δεν επεκτείνεται η χάραξη της καμπύλης πέραν των άκρων πειραματικών σημείων, εκτός και αν ζητείται «πρόβλεψη» σε τιμές της μεταβλητής εκτός του πεδίου που έχει μετρηθεί (π.χ. στην άσκηση A2).

## Διαδικασία άσκησης

Προφανώς, απαιτείται πρωτίστως **επιμελής προετοιμασία** με την μελέτη του φυλλαδίου θεωρίας σφαλμάτων και του υλικού των εισαγωγικών διαλέξεων.

Με τους πίνακες πειραματικών δεδομένων που θα δοθούν σε κάθε φοιτητή, θα γίνουν **επί τόπου** ασκήσεις, όπου περιλαμβάνονται **μαθηματικοί υπολογισμοί** μέσης τιμής, σφάλματος και σχετικού σφάλματος, δευτερογενείς υπολογισμούς συνθέτων μεγεθών και διάδοση σφάλματος, στρογγυλοποιήσεις.

Στη συνέχεια ζητείται **γραφική παράσταση**, με προσεκτική χάραξη αξόνων (κλίμακες, μετατόπιση αρχής), απεικόνιση των σημείων, απεικόνιση των σφαλμάτων αυτών, χάραξη καμπύλης, υπολογισμοί κλίσεων (και σε περιπτώσεις αρνητικών κλίσεων).

Τα φύλλα εργασίας **παραδίδονται στον διδάσκοντα προς διόρθωση** και κατά την επόμενη φορά εξηγείται και αναλύονται σε βάθος τα λάθη σε αυτά. Μπορεί να χρειαστεί να γίνει επανυπολογισμός, ή επανασχεδίαση γραφημάτων βάσει των συγκεκριμένων παρατηρήσεων και εξηγήσεων του διδάσκοντα.

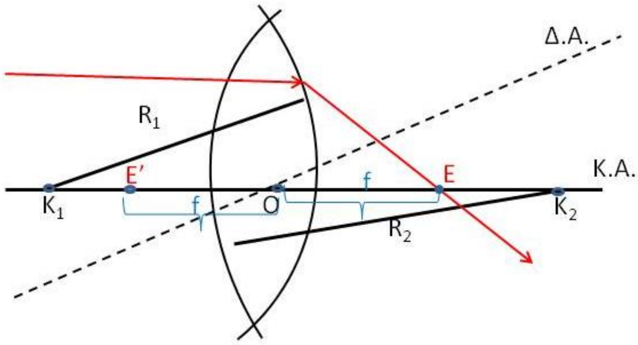
### Βιβλιογραφία

1. Θεωρία Μετρήσεων και Σφαλμάτων (Στάθη Στείρου)
2. Φυλλάδιο Θεωρία Σφαλμάτων (Εργαστηρίου Φυσικής)
3. Φυλλάδιο Εισαγωγικών Διαλέξεων (Εργαστηρίου Φυσικής)

# 1.1 Μέτρηση εστιακής απόστασης συγκλί-νοντος φακού

## 1. Στοιχεία από τη θεωρία

Ως **φακός** ορίζεται κάθε διαφανές σώμα, που περιορίζεται από δύο σφαιρικές επιφάνειες, ή από μία σφαιρική και μία επίπεδη επιφάνεια. Ως **κύριος άξονας του φακού** ορίζεται η ευθεία που ενώνει τα δύο κέντρα καμπυλότητας $K_1$ και $K_2$. Το «σημείο» που ο κύριος άξονας τέμνει τον φακό ονομάζεται οπτικό κέντρο του φακού. Κάθε άλλη ευθεία που περνάει από το οπτικό κέντρο, ονομάζεται δευτερεύων άξονας (Σχήμα 1).




*Σχήμα 1. Συγκλίνων φακός*

Έστω ότι επί του φακού προσπίπτει δέσμη ακτινών φωτός παράλληλη προς τον κύριο άξονα. Εάν, όταν αυτή αναδυθεί από το φακό συγκλίνει σε ένα σημείο του κυρίου άξονα, το σημείο καλείται κύρια εστία Ε του φακού και ο φακός είναι **συγκλίνων**.

Έστω ότι επί του φακού προσπίπτει δέσμη ακτινών φωτός παράλληλη προς τον κύριο άξονα. Εάν, όταν αυτή αναδυθεί από το φακό αποκλίνει αλλά οι φανταστικές προς τα πίσω προεκτάσεις των ακτινών συγκλίνουν σε ένα σημείο του κυρίου άξονα, το σημείο καλείται κύρια εστία Ε του φακού και ο φακός είναι **αποκλίνων**.

Στον συγκλίνοντα φακό στο σημείο Ε συγκλίνουν πραγματικές ακτίνες και όχι οι προεκτάσεις αυτών, λέμε ότι το σημείο Ε αποτελεί πραγματική εστία. Ένας συγκλίνων φακός, για παράδειγμα, έχει δύο κύριες πραγματικές εστίες, συμμετρικές ως προς το οπτικό κέντρο (Σχήμα 2α).

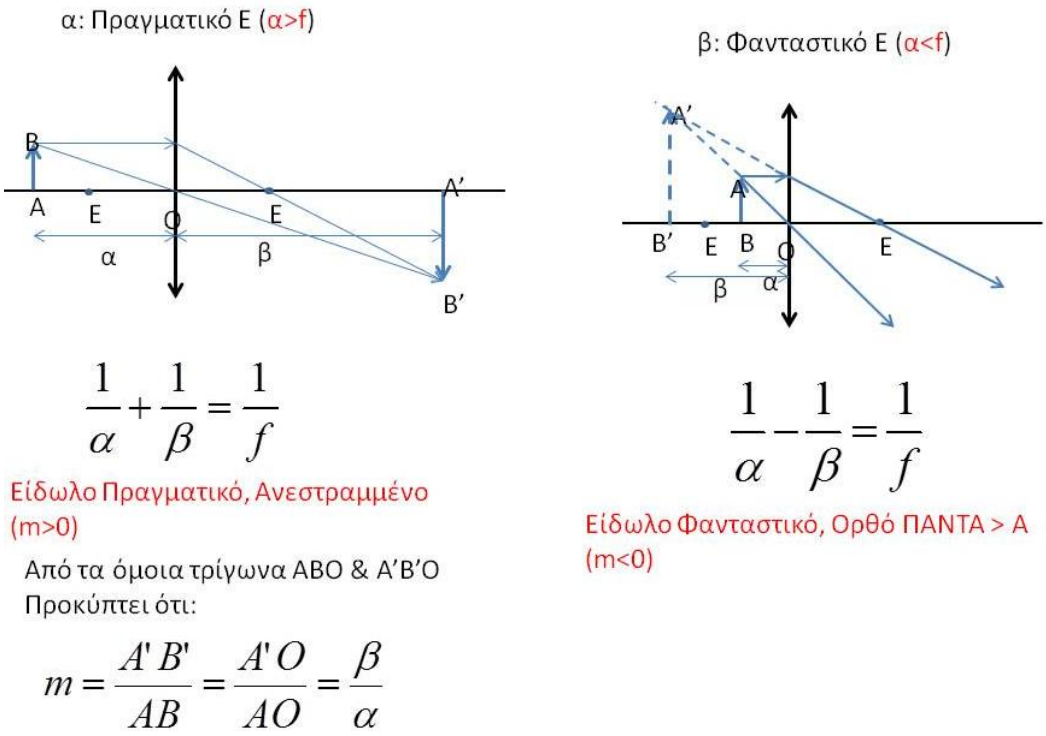
Στον αποκλίνοντα φακό στο σημείο Ε συγκλίνουν οι προεκτάσεις των ακτινών και λέμε ότι το σημείο Ε αποτελεί φανταστική εστία. .Ένας αποκλίνων φακός, για παράδειγμα, έχει δύο κύριες φανταστικές εστίες, συμμετρικές ως προς το οπτικό κέντρο (Σχήμα 2β).

Ορίζουμε ως εστιακή απόσταση f ενός φακού, την απόσταση της κύριας εστίας αυτού από το οπτικό κέντρο. Η εστιακή απόσταση σφαιρικού φακού μπορεί να προσδιορισθεί με τη βοήθεια της εξίσωσης:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{f} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου α και β η απόσταση του αντικειμένου και του ειδώλου από το φακό αντιστοίχως.

Η παραπάνω εξίσωση δίδει σχετικά ακριβή αποτελέσματα για μονοχρωματικό φώς που προσπίπτει σε λεπτούς φακούς και παραξονικές ακτίνες, δηλαδή ακτίνες που σχηματίζουν μικρές γωνίες με τον κύριο άξονα και διέρχονται πλησίον του οπτικού κέντρου.




*Σχήμα 2. Πραγματικό και φανταστικό είδωλο συγκλίνοντος φακού*

**Ισχύς φακού** καλείται το αντίστροφο της εστιακής αποστάσεως, δηλαδή: $\mathrm{I}=1/f$ .

**Μονάδα ισχύος φακού** στο S.I. είναι το $1m^{-1}$ και ονομάζεται διοπτρία.

Η εφαρμογή της εξίσωσης (1) οδηγεί σε ακριβές αποτέλεσμα για την εστιακή απόσταση του φακού εάν ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

i) οι ακτίνες από τις οποίες σχηματίζεται το είδωλο είναι παραξονικές, δηλαδή προσπίπτουν πάνω στο φακό σε μικρή απόσταση από το οπτικό του κέντρο και σχηματίζουν μικρή γωνία με τον κύριο άξονα του φακού

ii) το φώς που διαθλάται μέσα από το φακό είναι μονοχρωματικό και

iii) ο φακός είναι λεπτός, δηλαδή το πάχος του είναι πολύ μικρό σε σχέση με την ακτίνα του.

Εάν δεν ισχύει έστω μια από τις προϋποθέσεις αυτές θα υπεισέρχονται σφάλματα απεικόνισης. Τα κυριότερα σφάλματα απεικόνισης είναι α) η σφαιρική εκτροπή η οποία οφείλεται στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (π.χ. πάχος) του φακού και στον τρόπο που φωτίζεται (μη παραξονικές ακτίνες) και β) η χρωματική εκτροπή η οποία οφείλεται στην εξάρτηση του δείκτη διάθλασης του υλικού του φακού από το μήκος κύματος του φωτός που διαθλάται μέσα από αυτόν (φαινόμενο διασποράς). Τα σφάλματα αυτά έχουν ως αποτέλεσμα η μέτρηση της εστιακής απόστασης f να είναι περιορισμένης ακρίβειας.

## 2. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από:

i) Συγκλίνοντα αμφίκυρτο φακό.

ii) Λαμπτήρα πυρακτώσεως.

iii) Πέτασμα για την απεικόνιση του ειδώλου.

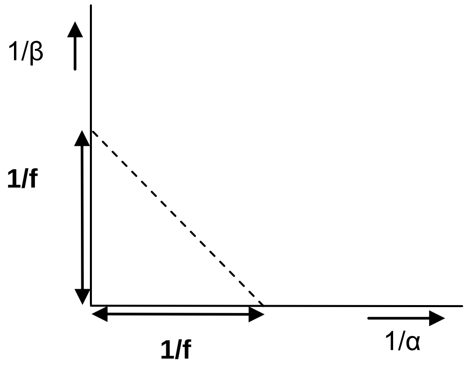
iv) Ευθύγραμμο άξονα (ράγα) με υποδιαιρέσεις σε mm, πάνω στον οποίο μπορεί να στηρίζεται ο φακός και το πέτασμα, τα οποία μπορούν να μετακινηθούν.

## 3. Πειραματική διαδικασία

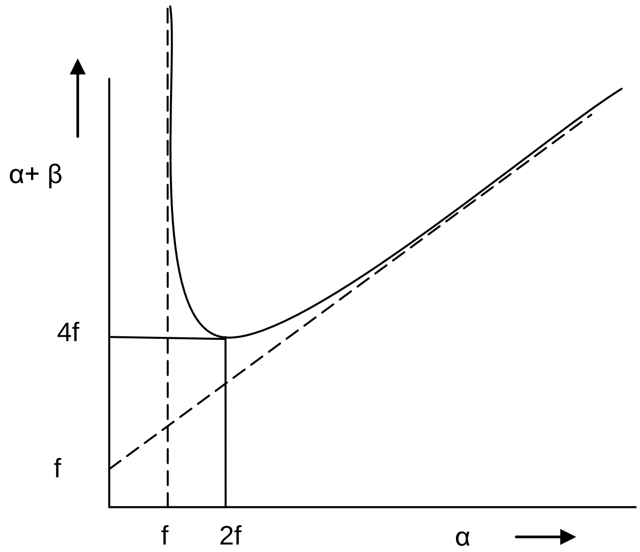
1. Απεικονίζουμε το φωτεινό αντικείμενο (π.χ. το πυρακτωμένο νήμα ενός λαμπτήρα) επί του πετάσματος, μετρούμε τις αποστάσεις α, β και καταχωρίζουμε τις τιμές στον πίνακα για τον υπολογισμό εστιακής απόστασης φακού. Επαναλαμβάνουμε έως δέκα φορές, για μεγάλη περιοχή τιμών του α.

| αα | α (cm) | β (cm) | 1/α ($cm^{-1}$) | 1/β ($cm^{-1}$) | f (cm) | $f_{aver}$ (cm) | δf (cm) | $f_{aver}$± δf |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | |

2. Υπολογίζουμε τα 1/α, 1/β και τα αντίστοιχα 1/f με βάση την Εξ.(1). Στη συνέχεια από τις τιμές **f** υπολογίζουμε τη μέση τιμή της $f_{aver}$ και το σφάλμα της μέσης τιμής.
3. Από τη μέση τιμή της $f_{aver}$ υπολογίζουμε την ισχύ του φακού ***I(±δI)***, σε διοπτρίες.
4. Χαράζουμε την ευθεία (1/α)=φ(1/β) και υπολογίζουμε από αυτή την εστιακή απόσταση f (Σχήμα 3). Συγκρίνουμε την τιμή αυτή με την τιμή της ***f*** της ερώτησης 2.
5. Χαράζουμε την καμπύλη α+β=g(α). Πόσο απέχουν οι ασύμπτωτες αυτής της καμπύλης από τους άξονες συντεταγμένων; Χαράζουμε τις ασύμπτωτες και υπολογίζουμε την εστιακή απόσταση ***f*** γραφικά από το Σχήμα 4.
6. Συγκρίνουμε και σχολιάζουμε τις τιμές της εστιακής απόστασης ***f*** που προέκυψαν από τις τρεις μεθόδους επεξεργασίας.




*Σχήμα 3: Γραφική απεικόνιση της συνάρτησης 1/β=φ(1/α)*




*Σχήμα 4: Γραφική απεικόνιση της συνάρτησης* ***α + β = g(α)*** *.*

## Απαραίτητες γνώσεις (από οποιαδήποτε πηγή)

Συγκλίνοντες και αποκλίνοντες φακοί, Συστήματα φακών, Ισχύς φακού, Μέτρηση εστιακής απόστασης φακού, Σφάλματα φακών

# 1.2. Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με εκκρεμές

## 1. Στοιχεία από τη θεωρία

Η διάταξη που φαίνεται στο σχήμα 1(α) μπορεί να θεωρηθεί ως απλό εκκρεμές αν το μήκος του νήματος από το οποίο είναι δεμένη η σφαίρα είναι πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα της σφαίρας. Αν απομακρύνουμε τη σφαίρα από τη θέση ισορροπίας κατά γωνία θ και την αφήσουμε, αυτή θα κάνει περιοδική κίνηση. Αν η γωνία θ είναι μικρή, τέτοια ώστε $\sin\theta_0 \approx \theta_0$, η κίνηση αυτή είναι (προσεγγιστικά) απλή αρμονική ταλάντωση. Η περίοδος Τ ενός απλού εκκρεμούς, για μικρά πλάτη ταλάντωσης $\theta_0$, δίδεται από την γνωστή σχέση:

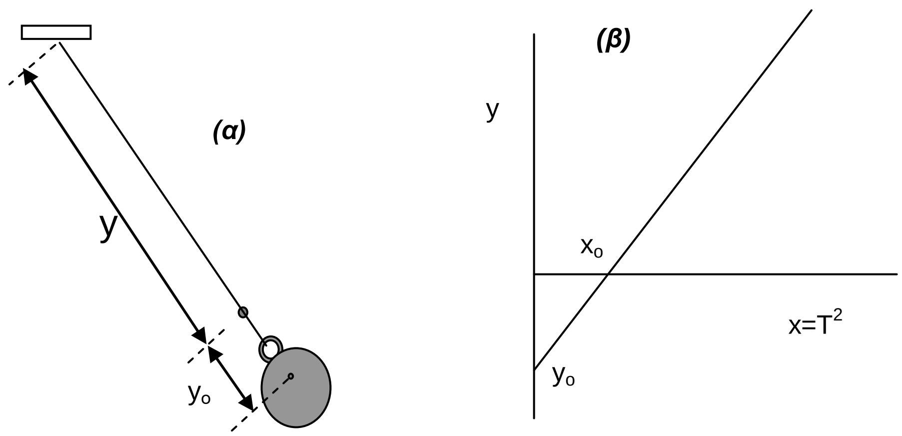
$$T = 2\pi\sqrt{l/g} \qquad (1)$$

Μετρώντας την περίοδο Τ μπορούμε από την εξίσωση (1) να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας, g, με την προϋπόθεση ότι γνωρίζουμε την απόσταση, ℓ, του κέντρου βάρους του συστήματος νήμα-σφαίρα από το σημείο ανάρτησης. <u>Προσοχή: Η απόσταση ℓ δεν ταυτίζεται με το μήκος του νήματος.</u>

Στη μέτρηση του ℓ υπάρχει δυσκολία επειδή α) το νήμα δεν είναι αβαρές β) η σφαίρα έχει διαστάσεις. Την απόσταση ℓ δεν την γνωρίζουμε ακόμα και αν αμελήσουμε τη μάζα του νήματος επειδή το κέντρο μάζας της σφαίρας δεν ταυτίζεται με το γεωμετρικό της κέντρο (αφού για να προσδέσουμε σ’ αυτήν το νήμα θα πρέπει να την τρυπήσουμε ή να βάλουμε άγκιστρο).

Την δυσκολία στην μέτρηση της απόστασης ℓ μπορούμε να την παρακάμψουμε με τον εξής τρόπο: φτιάχνουμε ένα μικρό κόμβο-σημάδι κοντά στη σφαίρα. Έστω y η απόσταση του κόμβου από το σημείο ανάρτησης και $y_0$ η απόσταση κόμβου-κέντρου μάζας όπως φαίνεται στο σχήμα 1α. Προφανώς ισχύει: $\ell = y + y_0$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1) και επιλύοντας ως προς y προκύπτει:

$$y = \frac{g}{4\pi^2}T^2 - y_0 \qquad (2)$$




*Σχήμα 1: (α) Ορισμός των μηκών y και $y_0$. (β) Η ευθεία $y=(g/4\pi^2)x-y_0$ έχει κλίση $K=\Delta y/\Delta x=g/4\pi^2$ και συντεταγμένες επί την αρχή: $x_0=(4\pi^2/g)y_0$ και $-y_0$.*

Η εξίσωση (2) σε άξονες $T^2$, y είναι ευθεία με κλίση $K=g/4\pi^2$ (Σχ. 1*β*). Απο την κλίση K θα προσδιορίσουμε την τιμή του g.

## 2. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από:

α. Μεταλλική σφαίρα η οποία κρέμεται από ακίνητο στήριγμα με εύκαμπτο ελαφρό νήμα. Η α-νάρτηση δίδει την δυνατότητα μεταβολής του μήκους του εκκρεμούς. Στο νήμα υπάρχει ήδη κόμβος-σημάδι.

β. Χρονόμετρο με ακρίβεια 0.1s.

γ. Χιλιοστομετρικός κανόνας.

## 3. Πειραματική διαδικασία

1. Για 10 διαφορετικές τιμές του y από 20 μέχρι 110cm μετρούμε τον χρόνο 20 περιόδων (20T). Μεταβάλλουμε το μήκος y ελευθερώνοντας το σταθερό άκρο του νήματος από το σύστημα εξάρτησης του.
2. Υπολογίζουμε το χρόνο T μιας περιόδου και το τετράγωνό της $T^2$ σε $s^2$. Κατασκευάζουμε τον Πίνακα I.

| y (cm) | 20T (s) | T (s) | $T^2$ ($s^2$) |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |

3. Χαράζουμε την ευθεία $y=f(T^2)$ και από την κλίση της υπολογίζουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Επίσης από την τεταγμένη στην αρχή προσδιορίζουμε το $y_0$. Υπολογίζουμε επίσης το σφάλμα δg του g.
4. Εφαρμόζουμε την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (βλ. παράρτημα) για να προσδιορίσο-υμε την τιμή της κλίσης K και της τεταγμένης στην αρχή $-y_o$ για την βέλτιστη ευθεία που δίδεται από την εξίσωση (2) με $x=T^2$. Από την τιμή της κλίσης βρίσκουμε την τιμή του g και την συγκρίνουμε με την αναμενόμενη τιμή $9.807 m/s^2$.

## 4. Βιβλιογραφία

**Απαραίτητες γνώσεις (από οποιαδήποτε πηγή)** γραμμική αρμονική ταλάντωση, απλό μα-θηματικό εκκρεμές, φθίνουσα ταλάντωση, νόμος παγκόσμιας έλξης, πεδίο βαρύτητας

Alonso- Finn, Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική, Τόμος I, Κεφ. 12.

Berkeley Physics, Μηχανική, Κεφ. 7.

# Παράρτημα: Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων*

Έστω δύο ποσότητες x και ψ, που συνδέονται με τη γραμμική συνάρτηση ψ=αχ+β. Εάν $x_i$ και $ψ_i$ ένα ζευγάρι τιμών, αυτό λόγω πειραματικών σφαλμάτων, δεν θα ικανοποιεί την πιο πάνω συνάρτηση. Οπότε: $δψ_i=ψ_i-αχ_i-β\neq0$, όπου $δψ_i$ η απόκλιση της τιμής $ψ_i$ από την πραγματική τιμή ψ.

Υπολογίζουμε το τετράγωνο της $δψ_i$ και εάν n είναι ο ολικός αριθμός των μετρήσεων υπολογίζουμε το άθροισμα όλων αυτών των τετραγώνων των αποκλίσεων

$$\sum_{n=1}^{n}(\delta\psi_i)^2=\sum_{n=1}^{n}(y_i-\alpha x_i-\beta)^2\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{n}(\delta\psi_i)^2=\sum_{n=1}^{n}\left(y_i^2+\alpha^2x_i^2+\beta^2-2\alpha x_iy_i-2\beta y_i+2\alpha\beta x_i\right)\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{n}(\delta\psi_i)^2=\sum_{n=1}^{n}y_i^2+\sum_{n=1}^{n}\alpha^2x_i^2+n\beta^2-2\alpha\sum_{n=1}^{n}x_iy_i-2\beta\sum_{n=1}^{n}y_i+2\alpha\beta\sum_{n=1}^{n}x_i$$

Έστω $E=\sum_{n=1}^{n}(\delta\psi_i)^2$ .

Για να είναι το Ε ελάχιστο θα πρέπει οι μερικές παράγωγοι του Ε ως προς τις σταθερές α και β να είναι μηδέν. Οπότε:

$$\frac{\partial E}{\partial\alpha}=0\Rightarrow2\alpha\sum_{n=1}^{n}x_i^2-2\sum_{n=1}^{n}x_iy_i+2\beta\sum_{n=1}^{n}x_i=0$$

$$\frac{\partial E}{\partial\beta}=0\Rightarrow2n\beta-2\sum_{n=1}^{n}y_i+2\alpha\sum_{n=1}^{n}x_i=0$$

Καταλήγουμε έτσι στις ακόλουθες τιμές των σταθερών α και β:

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix}\sum x_iy_i & \sum x_i\\ \sum y_i & n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sum x_i^2 & \sum x_i\\ \sum x_i & n\end{vmatrix}}=\frac{n\sum_{n=1}^{n}x_iy_i-\sum_{n=1}^{n}x_i\sum_{n=1}^{n}y_i}{n\sum_{n=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{n=1}^{n}x_i\right)^2}$$

$$\beta=\frac{\begin{vmatrix}\sum x_i^2 & \sum x_iy_i\\ \sum x_i & \sum y_i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sum x_i^2 & \sum x_i\\ \sum x_i & n\end{vmatrix}}=\frac{\sum_{n=1}^{n}x_i^2\cdot\sum_{n=1}^{n}y_i-\sum_{n=1}^{n}x_i\sum_{n=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{n=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{n=1}^{n}x_i\right)^2}$$

* Ίδε επίσης σελίδες 54-55 του παρόντος φυλλαδίου

# 1.3. Εισαγωγική Άσκηση Ηλεκτρισμού

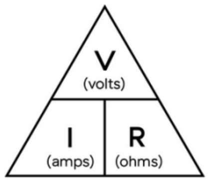
Σκοπός της άσκησης αυτής είναι η εξοικείωση των φοιτητών στις βασικές έννοιες του ηλεκτρισμού, χρησιμοποιώντας απλή οργανολογία.

## Νόμος του Ohm

Όταν εφαρμόσουμε μία διαφορά δυναμικού (τάση) $V$ στα άκρα ενός αγωγού (αλλά και ημιαγωγού) θα διαπεράσει τον αγωγό ένα ρεύμα $I$. Η *αντίσταση* $R$ σε αυτήν την περίπτωση είναι ανάλογη της διαφοράς δυναμικού V στα άκρα της προς το ρεύμα $I$ που τη διαρρέει και υπολογίζεται από την σχέση

$$R = V / I \qquad \text{(Νόμος του Ohm)} \qquad (1)$$

Αν μεταβάλουμε την τάση θα μεταβληθεί γενικά και το ρεύμα η μεταβολή αυτή μπορεί να περιγραφεί από την συνάρτηση $I = f(V)$.



*Το τρίγωνο του νόμου του Ohm παρουσιάζει τις σχέσεις μεταξύ τάσης (V), ρεύματος (I) και αντίστασης (R).*

Στους αγωγούς και σε μερικά άλλα υλικά και για σταθερές συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης, η συνάρτηση αυτή είναι γραμμική και το αντίστροφο της κλίσης της (ή η κλίση της συνάρτησης $V = f(I)$ ) ονομάζεται *αντίσταση του υλικού* το δε υλικό αυτό χαρακτη ρίζεται ως *ωμικό υλικό*. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε ότι το ρεύμα το οποίο διαρρέει την αντίσταση[1] υπολογίζεται από την σχέση $I = V / R$.

Αν η συνάρτηση δεν είναι γραμμική (π.χ. στους ημιαγωγούς), το υλικό χαρακτηρίζεται ως *μη ωμικό*.

Σε κάθε περίπτωση η αντίσταση εξαρτάται από την θερμοκρασία του υλικού· αν θερμάνουμε μία ωμική αντίσταση, η οποία αρχικά διαρρέεται από ρεύμα $I = V / R$, όπου $V$ η (σταθερή) διαφορά δυναμικού που εφαρμόζεται στα άκρα της και η αντίσταση σε θερμοκρασία αναφοράς, θα παρατηρήσουμε μία ελάττωση (συνήθως) του ρεύματος που εξηγείται με μία αύξηση της αντίστασης. Αυτό ισχύει στους περισσότερους αγωγούς και χαρακτηριστικό παράδειγμα έχουμε στην λυχνία πυρακτώσεως, όπου, παρόλο το νήμα της λυχνίας είναι από αγωγό, η συνάρτηση $I = f(V)$ δεν είναι γραμμική, διότι με την μεταβολή του ρεύματος, μεταβάλλεται η θερμοκρασία του νήματος (μέχρι και που φωτοβολεί) και αυξάνει η αντίσταση του.

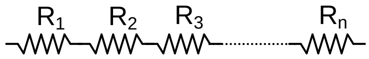
[1] Με τον όρο αντίσταση περιγράφουμε δύο έννοιες:
- Το φαινόμενο της αντίστασης διέλευσης ρεύματος μέσα από ένα υλικό όταν εφαρμόσουμε στα άκρα του μία διαφορά δυναμικού V
- Το υλικό (ή την ιδιότητα του υλικού) το οποίο παρεμβάλλεται σε ένα κύκλωμα και που ρυθμίζει το διερχόμενο ρεύμα I όταν εφαρμόσουμε στα άκρα του μία διαφορά δυναμικού V

### Σύνθεση αντιστάσεων

Συνήθως στα ηλεκτρικά και ηλεκτρονικά κυκλώματα εμφανίζονται αντιστάσεις σε συνδυασμό. Μελετώντας τις αντιστάσεις καταλλήλων συνδυασμών μπορούμε να αντικαταστήσουμε δύο ή και περισσότερες αντιστάσεις με την αντίστοιχη ισοδύναμη της, δηλαδή με μία αντίσταση της οποίας η επίδραση στο κύκλωμα θα είναι ίση με την επίδραση των αντιστάσεων τις οποίες αντικαθιστούμε.

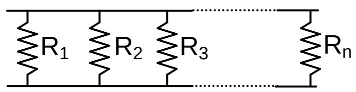
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- ***Αντιστάσεις σε σειρά.*** Αν έχουμε τις αντιστάσεις $R_1$, $R_2$, …$R_n$ συνδεδεμένες σε σειρά, όπως στο σχήμα, η ισοδύναμη αντίσταση $R$ ισούται με το άθροισμα των αντιστάσεων $R_i$, i=1, 2,..,n.




$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \sum_1^n R_i \qquad (2)$$

- ***Αντιστάσεις παράλληλες.*** Αν έχουμε τις αντιστάσεις $R_1$, $R_2$, …$R_n$ συνδεδεμένες παράλληλα η μία με την άλλη, όπως στο σχήμα, το αντίστροφο της ισοδύναμης αντίστασης R ισούται με το άθροισμα των αντιστρόφων των αντιστάσεων $R_i$, i=1, 2,..,n.



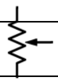
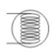
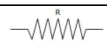

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} = \sum_1^n \frac{1}{R_i} \qquad (3)$$

Σε ένα πολύπλοκο συνδυασμό αντιστάσεων, επαναλαμβάνουμε αυτές τις διαδικασίες, εφ' όσον μπορούμε, έως ότου καταλήξουμε σε ένα απλό συνδυασμό ή μία αντίσταση.

## *Πειραματικό μέρος*

## Εξοικειωνόμαστε με τη πλακέτα εργασίας και αναγνωρίζουμε τα όργανα που θα χρησιμοποιηθούν:

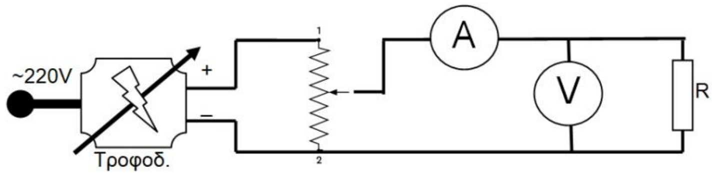
- 1 τροφοδοτικό 220V AC→3-12V DC, με επιλογέα τάσεων 
- 1 βάση (πλακέτα) με υποδοχείς καλωδίων και με:

| | |
|---|---|
| 1 Μεταβλητή αντίσταση σύρματος 1000Ω |  |
| 1 Λυχνία πυρακτώσεως 12V |  |
| 4 Αντιστάσεις |  |
| 2 Πολύμετρα[2] (για χρήση σαν αμπερόμετρα A , βολτόμετρα V και/ή ωμόμετρα Ω ) | |

- Καλώδια σύνδεσης

[2] Περιγραφή στο τέλος της άσκησης.

Γενικά ακολουθούμε την πρακτική σύμβαση ότι με κόκκινο ακροδέκτη συμβολίζεται το θετικό άκρο του τροφοδοτικού συνεχούς ρεύματος και με μαύρο το αρνητικό.




*Σχήμα 1*

## Πείραμα 1

## Επαλήθευση νόμου του Ohm σε ωμική αντίσταση

1. Πραγματοποιούμε τη συνδεσμολογία του Σχήματος 1, επιλέγοντας για την αντίσταση R, μία από τις δύο αντιστάσεις $R_1$ ή $R_2$ της πλακέτας.

2. Ρυθμίζουμε, με τον επιλογέα, το τροφοδοτικό συνεχούς ρεύματος στα 12 V.

3. Μεταβάλλοντας με το ποτενσιόμετρο την τάση στα άκρα της αντίστασης R μετράμε την τάση V και το ρεύμα I από πολύ μικρές τιμές της τάσεως έως την μέγιστη (12 V).

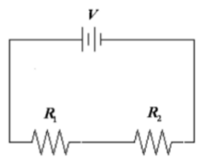
4. Σχεδιάζουμε την καμπύλη I = f(V), την σχολιάζουμε ελέγχοντας αν ισχύει ο νόμος του Ohm.

5. Από την κλίση της I = f(V), (αν είναι εφικτό), υπολογίζουμε την τιμή R της αντίστασης. Μετράμε, με το πολύμετρο (θέση αντίστασης), την τιμή R' της αντίστασης (εκτός κυκλώματος). Συγκρίνουμε τις δύο τιμές και σχολιάζουμε την διαφορά.

## Πείραμα 2

## Συνολική αντίσταση σε ένα κύκλωμα σειράς.

1. Επιλέξτε δύο διαφορετικές αντιστάσεις $R_1$, $R_2$. Μετρήστε την κάθε μία μεμονωμένη αντίσταση και καταγράψτε τις τιμές των. Προσθέστε τις μετρημένες τιμές $R_1$, $R_2$ και καταγράψτε τη συνολική τιμή $R'_{total}$.




2. Συνδέστε τις δύο διαφορετικές αντιστάσεις $R_1$, $R_2$ σε σειρά στο κύκλωμα του Σχήματος 1.

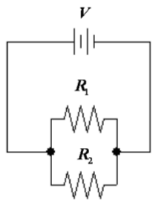
3. Μεταβάλλοντας με το ποτενσιόμετρο την τάση στα άκρα του συνδυασμού των αντιστάσεων σε έξι διαφορετικές τάσεις εισόδου (για παράδειγμα, 3 V, 4.5 V, 6 V, 7.5 V, 9V και 12 V) μετρήστε το ρεύμα I.

4. Σχεδιάζουμε την καμπύλη I = f(V), την σχολιάζουμε ελέγχοντας αν ισχύει ο νόμος του Ohm.

5. Από την κλίση της I = f(V), υπολογίζουμε την τιμή $R_{total}$ της αντίστασης.

6. Συγκρίνουμε τις δύο τιμές $R_{total}$ , $R'_{total}$ και σχολιάζουμε την διαφορά.

## Συνολική αντίσταση σε ένα παράλληλο κύκλωμα.




1. Συνδέστε τις δύο διαφορετικές αντιστάσεις $R_1$, $R_2$ παράλληλα στο κύκλωμα του Σχήματος 1.

2. Μεταβάλλοντας με το ποτενσιόμετρο την τάση στα άκρα του συνδυασμού των αντιστάσεων σε πέντε διαφορετικές τάσεις εισόδου (για παράδειγμα, 3 V, 4.5 V, 6 V, 7.5 V, 9V και 12 V) μετρήστε το ρεύμα I. 0V

3. Σχεδιάζουμε την καμπύλη I = f(V), την σχολιάζουμε ελέγχοντας αν ισχύει ο νόμος του Ohm.

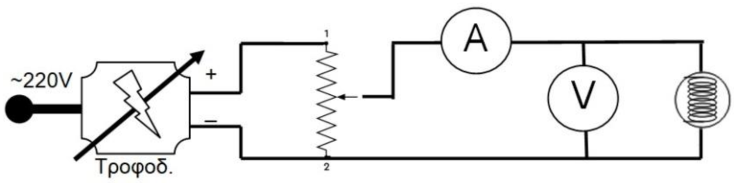
4. Από την κλίση της I = f(V), υπολογίζουμε την τιμή $R_{total}$ της αντίστασης.

**Πίνακας:** Εξισώσεις για δύο αντιστάσεις συνδεδεμένες εν σειρά και παράλληλα.

| **Αντιστάσεις συνδεδεμένες εν σειρά** | **Αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλες** |
|---|---|
| $V_S = V_1 + V_2$ | $V_P = V_1 = V_2$ |
| $I_S = I_1 = I_2$ | $I_P = I_1 + I_2$ |
| $R_S = R_1 + R_2$ | $\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ |

## Πείραμα 3

## Επαλήθευση νόμου του Ohm σε αντίσταση όταν μεταβάλλεται η θερμοκρασία της.




*Σχήμα 2*

1. Πραγματοποιούμε το κύκλωμα του Σχήματος 2.
2. Μεταβάλλοντας με το ποτενσιόμετρο την τάση στα άκρα της λυχνίας από την μικρότερη τιμή της τάσεως έως την μεγαλύτερη (12V) και μετράμε την τάση V και το ρεύμα I.

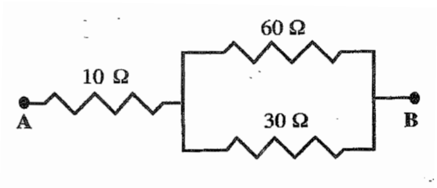
3. Σχεδιάζουμε την καμπύλη I = f(V) και υπολογίζουμε την κλίση της σε δύο σημεία. Από την κάθε τιμή της κλίσης που υπολογίστηκε υπολογίζουμε την τιμή της αντίστασης. Ελέγξτε αν ισχύει ο νόμος του Ohm. Αν όχι δίνουμε μία εξήγηση.

# Ερωτήσεις

1. Αποδείξτε τους δύο τύπους της σύνθεσης αντιστάσεων.

2. Τρεις αντιστάσεις τοποθετούνται σε ένα κύκλωμα όπως φαίνεται διπλανό στο σχήμα. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α και Β είναι 30 V.

Ποια είναι η ισοδύναμη αντίσταση και ποιό το ρεύμα μεταξύ των σημείων Α και Β;




# Βιβλιογραφία


- Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική, H.D. Young & R.A. Freedman, Τόμος Β' Ηλεκτρομαγνητισμός Οπτική. (Νόμος του Ohm).
- Φυσική (Ενιαίο), Halliday David, Resnick Robert, Walker Jearl. (Νόμος του Ohm).
- Από τα αντίστοιχα βιβλία Φυσικής του Λυκείου.

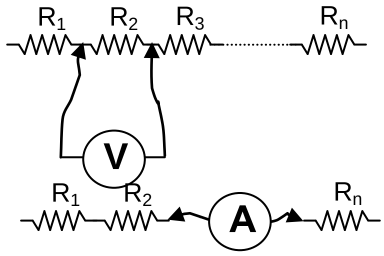
# Το πολύμετρο

Το πολύμετρο είναι ένα όργανο το οποίο χρησιμοποιούμε σε ηλεκτρικές μετρήσεις· κυρίως μετράμε την τάση, το ρεύμα και την αντίσταση αλλά επίσης, ανάλογα με το συγκεκριμένο όργανο, μπορούμε να μετρήσουμε χωρητικότητες, συχνότητες κλπ.


Τα τωρινά πολύμετρα είναι συνήθως ηλεκτρονικά (ψηφιακά) και φορητά όργανα και λειτουργούν με μπαταρία. Έχουν τρεις ή τέσσερες ακροδέκτες, οι οποίοι συνδέονται ανά δύο όπως απαιτεί η συγκεκριμένη μέτρηση, ενώ το μέγεθος το οποίο μετράμε (Volt, Ampere κλπ) και το εύρος της μέτρησης (συνήθως έως 2, 20, 200 κλπ) επιλέγεται με κατάλληλο συνδυασμό πλήκτρων ή περιστροφικού επιλογέα. Σαν βολτόμετρα, η εσωτερική αντίσταση τους είναι πολύ μεγάλη, της τάξεως των 10MΩ.

Στο Εργαστήριο Φυσικής τα χρησιμοποιούμε αντί για απλά βολτόμετρα και αμπερόμετρα, επιλέγοντας καταλλήλως τον τύπο λειτουργίας τους, το κατάλληλο ζεύγος ακροδεκτών και το εύρος της μέτρησης με τον επιλογέα. Η συνδεσμολογία γενικά για το βολτόμετρο ή το αμπερόμετρο είναι:

- Το βολτόμετρο, συνδέεται στα (δύο) σημεία του ηλεκτρικού κυκλώματος (όπως φαίνεται παραπλεύρως) στα οποία θέλουμε να μετρήσουμε την διαφορά δυναμικού. Καταχρηστικά χρησιμοποιούμε την έκφραση "συνδέεται παράλληλα".
- Το αμπερόμετρο, παρεμβάλλεται στο σημείο του ηλεκτρικού κυκλώματος όπου θέλουμε να μετρήσουμε την τιμή του ρεύματος το οποίο διαρρέει εκείνο το σημείο. Καταχρηστικά χρησιμοποιούμε την έκφραση "συνδέεται σε σειρά".




**Όταν πραγματοποιείτε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα πρώτα να τοποθετείτε τα «εν σειρά» στοιχεία του μέχρι να «κλείσει» το κύκλωμα και μετά να τοποθετείστε τα παράλληλα στοιχεία του (αν υπάρχουν).**

Στην φωτογραφία φαίνεται ένα τυπικό απλό πολύμετρο. Τα παρακάτω αναφέρονται ειδικά σε αυτό το πολύμετρο, αλλά γενικά ισχύουν, με μικρές παραλλαγές, για όλα τα πολύμετρα.

Κάτω δεξιά φαίνονται οι τρεις ακροδέκτες αυτού του πολυμέτρου. Ο ακροδέκτης COM είναι ο κοινός ακροδέκτης ο οποίος είναι πάντα συνδεδεμένος. Ο δεύτερος ακροδέκτης, ακριβώς από πάνω με την ένδειξη VΩmA χρησιμοποιείται (σε αυτό το πολύμετρο) μαζί με τον ακροδέκτη COM για την μέτρηση τάσεων, αντιστάσεων και ρεύματος σε mA ενώ ο τρίτος ακροδέκτης με την ένδειξη 10ADC χρησιμοποιείται μαζί με τον ακροδέκτη COM για την μέτρηση ρεύματος έως 10 A.

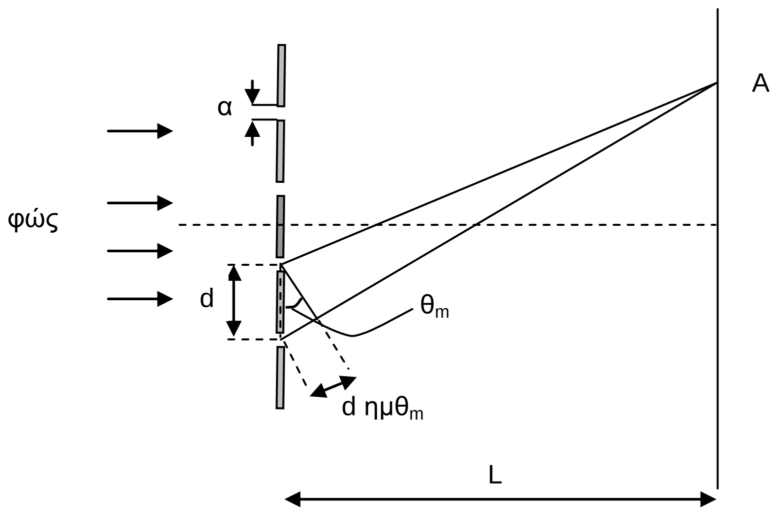
Ο περιστροφικός επιλογέας, ο οποίος λειτουργεί και σαν διακόπτης, επιλέγει τον τύπο μέτρησης· συνεχής τάση-πάνω αριστερά, εναλλασσόμενη τάση-πάνω δεξιά, συνεχές ρεύμα-δεξιά, αντίσταση-κάτω αριστερά, ενώ σε κάθε περιοχή επιλέγουμε το εύρος της αντιστοίχου μέτρησης, π.χ. το 2000m στα DCV σημαίνει ότι σε αυτή την θέση μπορούμε να μετρήσουμε συνεχή τάση μέχρι 2000mV (2V), ενώ το 20k στην περιοχή των Ω σημαίνει ότι σε αυτή την θέση μπορούμε να μετρήσουμε μέχρι 20kΩ. Σε αυτό το πολύμετρο διακρίνουμε την περιοχή μέτρησης των 10 A, ενώ η θέση hFE μετράμε τα χαρακτηριστικά των τρανζίστορ τα οποία για να μετρηθούν τοποθετούνται στις κατάλληλες υποδοχές κάτω αριστερά.

Στα ψηφιακά πολύμετρα η ένδειξη είναι προσημασμένη· είναι θετική αν ο ακροδέκτης VΩmA συνδεθεί σε σημείο το οποίο είναι θετικότερο από το σημείο όπου συνδέεται ο ακροδέκτης COM ενώ είναι αρνητική αν συνδεθούν αντίστροφα, οπότε εμφανίζεται ένα μείον μπροστά από την ένδειξη.

# 2.1. Προσδιορισμός μήκους κύματος δέσμης Laser με οπτικό φράγμα διέλευσης.

## 1. Στοιχεία από την θεωρία

Το οπτικό φράγμα είναι διάταξη που αποτελείται από μεγάλο αριθμό, Ν, παράλληλων ορθογωνίων σχισμών που απέχουν μεταξύ τους ίδια απόσταση, d, που ονομάζεται σταθερά του φράγματος. Το πλάτος κάθε σχισμής, α, είναι πολύ μικρότερο της απόστασης d (α<<d), όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Αν σε ένα φράγμα διέλευσης προσπέσει δέσμη παράλληλων ακτίνων με μήκος κύματος λ, οι σχισμές από τις οποίες διέρχεται το φώς ενεργούν σαν δευτερογενείς πηγές σύμφωνα με την αρχή του Huygens. Το διερχόμενο φως συμβάλλει και έτσι σχηματίζονται φωτεινοί και σκοτεινοί «κροσσοί συμβολής» στο πέτασμα, δηλαδή περιοχές (κηλίδες) όπου η ένταση του φωτός είναι μέγιστη (ενισχυτική συμβολή) ή μηδέν (καταστροφική συμβολή)




*Σχήμα 1: Σχηματική παράσταση οπτικού φράγματος διέλευσης και σχηματισμού κροσσών συμβολής σε πέτασμα.*

Ενισχυτική συμβολή (φωτεινός κροσσός) θα παρατηρηθεί, π.χ. στο σημείο Α αν

$$d\eta\mu\theta_m = m\lambda, \quad \text{όπου } m=0, \pm1, \pm2, \pm3 \qquad (1)$$

δηλαδή αν η διαφορά των οπτικών δρόμων που διανύει το φως που διέρχεται από δυο διαδοχικές σχισμές και καταλήγει στο σημείο Α του πετάσματος, σχ.1., είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ.

Η τιμή του ακέραιου αριθμού m στην εξίσωση (1), η οποία ονομάζεται εξίσωση φράγματος, προσδιορίζει την τάξη του κροσσού, δηλαδή τη γωνία $\theta_m$ στην οποία σχηματίζεται ο αντίστοιχος φωτεινός κροσσός σε σχέση με την κατεύθυνση της αρχικής δέσμης: m=0, μηδενικής τάξης, m=1 πρώτης τάξης, κλπ. (προς τα δεξιά, καθώς παρατηρούμε το φράγμα από κατεύθυνση αντίθετη της πηγής). Οι κροσσοί αριστερά του κεντρικού κροσσού (m=0) χαρακτηρίζονται από αρνητικά m, -1 για τον πρώτο, -2 για τον δεύτερο κοκ.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η μέγιστη τάξη φωτεινού κροσσού που είναι παρατηρήσιμη δίδεται από τη σχέση $m_{max} \leq d/\lambda$. Δηλαδή, ένα φράγμα με μεγάλο d θα δημιουργήσει μεγαλύτερο αριθμό παρατηρήσιμων κροσσών. Συνήθως οι κατασκευαστές δίδουν την «πυκνότητα του φράγματος» δηλαδή των αριθμό των σχισμών ανά μονάδα μήκους (π.χ. 200 lines/mm). Η σταθερά του φράγματος, d, προσδιορίζεται ως: d=1/«πυκνότητα».

Όπως φαίνεται από την εξίσωση (1) για φράγμα με δοσμένη σταθερά, οι γωνίες που σχηματίζονται οι κροσσοί συμβολής διαφορετικής τάξης εξαρτώνται από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας. (Εξαίρεση αποτελεί ο κεντρικός κροσσός (m=0) που βρίσκεται πάντα στην κατεύθυνση της αρχικής δέσμης). Αυτή η εξάρτηση έχει δύο σημαντικές συνέπειες:

α) ένα οπτικό φράγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μέτρηση του μήκους κύματος.

β) αν η αρχική δέσμη δεν είναι μονοχρωματική, η εξίσωση (1) θα ισχύει για κάθε μήκος κύματος ξεχωριστά, με αποτέλεσμα το φράγμα να προκαλεί φασματική ανάλυση του φωτός. Σε αυτή την περίπτωση για κάθε τάξη κροσσών (με εξαίρεση τη μηδενική, m=0) θα απεικονίζονται στο πέτασμα τόσες φωτεινές κηλίδες (διαφορετικού χρώματος) όσα και τα μήκη κύματος τα οποία περιέχει η αρχική δέσμη.

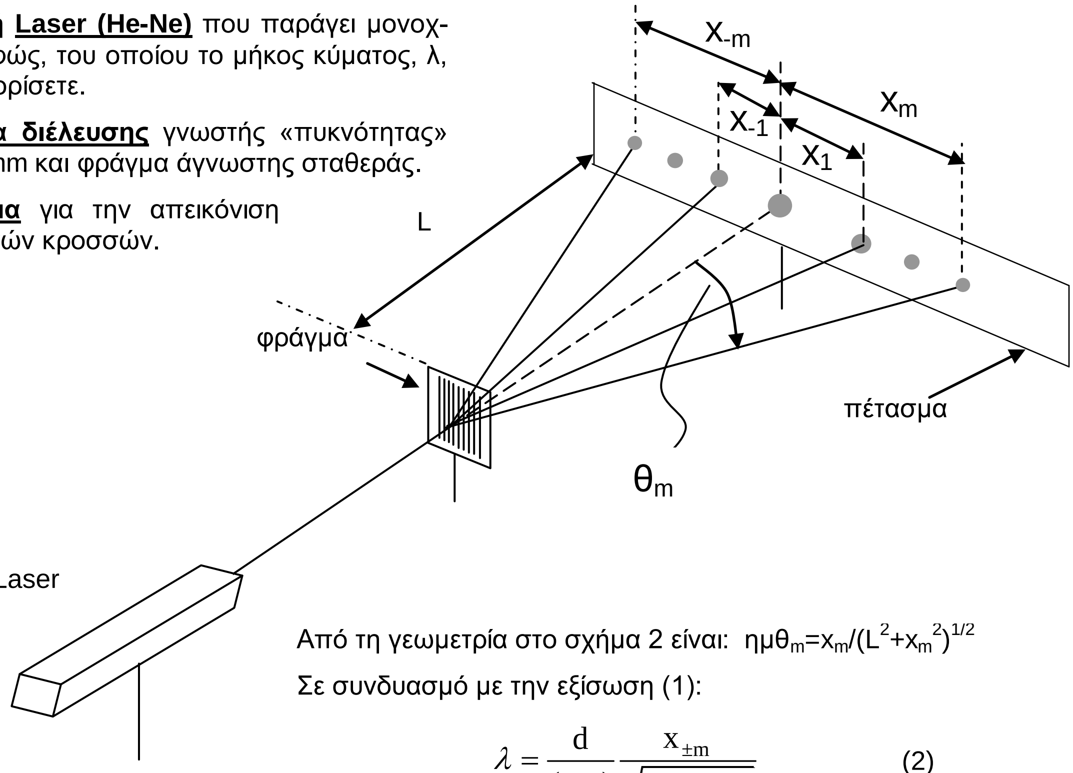
## 2. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη φαίνεται στο σχήμα 2 και αποτελείται από:

1. Συσκευή **Laser (He-Ne)** που παράγει μονοχρωματικό φώς, του οποίου το μήκος κύματος, λ, θα προσδιορίσετε.

2. **Φράγμα διέλευσης** γνωστής «πυκνότητας» 600 lines/mm και φράγμα άγνωστης σταθεράς.

3. **Πέτασμα** για την απεικόνιση των φωτεινών κροσσών.




Από τη γεωμετρία στο σχήμα 2 είναι: $\eta\mu\theta_m = x_m/(L^2+x_m^2)^{1/2}$

Σε συνδυασμό με την εξίσωση (1):

$$\lambda = \frac{d}{(\pm m)} \frac{x_{\pm m}}{\sqrt{L^2 + x_{\pm m}^2}} \qquad (2)$$

*Σχήμα 2: Πειραματική διάταξη*

## 3. Πειραματική διαδικασία

1. Τοποθετήστε το φράγμα γνωστής «πυκνότητας» μπροστά από το laser ώστε η επιφάνεια του να είναι κάθετη στην προσπίπτουσα δέσμη, με τις σχισμές κατακόρυφες.

2. Ενεργοποιήστε το Laser και παρατηρήστε τους κροσσούς συμβολής. Μεταβάλλετε την απόσταση πετάσματος-φράγματος ώστε πάνω στο πέτασμα να απεικονίζονται τουλάχιστον πέντε

φωτεινές κηλίδες. (Η επιφάνεια του πετάσματος πρέπει επίσης να είναι κάθετη στη κατεύθυνση της αρχικής δέσμης).

3. Τοποθετήστε χιλιοστομετρικό χαρτί πάνω στο πέτασμα. Σημειώστε τις θέσεις του κεντρικού κροσσού (φωτεινότερος όλων) και τις θέσεις όλων των άλλων φωτεινών κηλίδων δεξιά και αριστερά του κεντρικού κροσσού.

4. Απενεργοποιήστε το laser και μετρήστε την απόσταση φράγματος-πετάσματος, L.

5. Αφαιρέστε το χιλιοστομετρικό χαρτί από το πέτασμα και μετρήστε πάνω σ αυτό τις αποστάσεις $x_m$ και $x_{-m}$. Καταχωρήστε τα αποτελέσματα σας στον πίνακα 1.

| m | $x_{\pm m}$ (mm) | L(mm) | d (mm) | λ (nm) | <λ> (nm) | δ<λ>(nm) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -2 | | | | | | |
| -1 | | | | | | |
| 0 | | | | | | |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |

*<u>Πίνακας 1:</u> Αποτελέσματα μετρήσεων για τον υπολογισμό του μήκους κύματος λ.*

6. Για κάθε τιμή του $x_{\pm m}$ που βρήκατε υπολογίστε με τη βοήθεια της εξίσωσης (2) το μήκος κύματος λ. Υπολογίστε τη μέση τιμή <λ> και το σφάλμα της δ<λ>. Συγκρίνετε τη μέση τιμή που βρήκατε με την τιμή που δίδει ο κατασκευαστής.

7. Απομακρύνετε το φράγμα από τη διάταξη και τοποθετήστε στη θέση του το φράγμα άγνωστης σταθεράς.

8. Επαναλάβετε τα προηγούμενα βήματα 2 έως 5 με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και καταχωρήστε τις τιμές στον πίνακα 2

| m | $x_{\pm m}$ (mm) | L(mm) | <λ> (nm) | d(mm) | <d> (mm) | δ<d>(mm) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -2 | | | | | | |
| -1 | | | | | | |
| 0 | | | | | | |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |

*<u>Πίνακας 2:</u> Αποτελέσματα μετρήσεων για τον υπολογισμό της σταθεράς φράγματος.*

9. Για κάθε τιμή του $x_{\pm m}$ που βρήκατε υπολογίστε με τη βοήθεια της εξίσωσης (2) τη σταθερά d του φράγματος, χρησιμοποιώντας για το μήκος κύματος την τιμή <λ> που προσδιορίσατε στο προηγούμενο πείραμα. Υπολογίστε τη μέση τιμή <d> και το σφάλμα της δ<d>.

# 4. Βιβλιογραφία

**Απαραίτητες γνώσεις (από οποιαδήποτε πηγή):** κύμα, μήκος κύματος, συμβολή, περίθλαση, φάσματα, οπτικό φράγμα

H. D. Young, Τόμος Β, Κεφ. 37, 38

# 2.2. Βαθμονόμηση θερμοζεύγους-θερμοηλεκτρικό φαινόμενο

## 1. Θεωρία

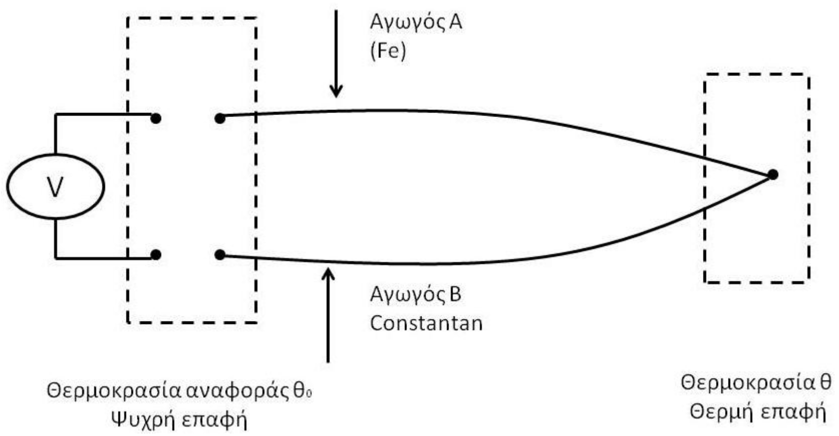
Η θερμοκρασία είναι μέτρο της μέσης τιμής της ενέργειας των ατόμων ή μορίων, των σωμάτων, λόγω της θερμικής τους κίνησης. Συνεπώς, για την μέτρηση της θερμοκρασίας ενός αερίου σώματος πρέπει να μετρήσουμε την ταχύτητα των μορίων του και για την μέτρηση της αντίστοιχης ενός στερεού να μετρήσουμε το πλάτος των θερμικών ταλαντώσεων των δομικών του λίθων. Κάτι τέτοιο είναι πρακτικά αδύνατο γι αυτό καταφεύγουμε στην μέτρηση άλλων μεγεθών τα οποία εξαρτώνται από την θερμοκρασία των σωμάτων.

Στην άσκηση η μέτρηση της θερμοκρασίας θα βασισθεί στο ***θερμοηλεκτρικό φαινόμενο***. Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιείται για μέτρηση της θερμοκρασίας βάσει του θερμοηλεκτρικού φαινομένου είναι το ***θερμοζεύγος***. Το θερμοζεύγος αποτελείται από δύο αγωγούς, από διαφορετικά μέταλλα ή κράματα μετάλλων, των οποίων τα σημεία επαφής βρίσκονται σε διαφορετικές θερμοκρασίες. Λόγω της διαφοράς της θερμοκρασίας μεταξύ των επαφών του θερμοστοιχείου αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη E(mV). Το βολτόμετρο μετρά την αναπτυσσόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη και το φαινόμενο καλείται θερμοηλεκτρικό (φαινόμενο Seebeck).

Στο ένα τους άκρο τα σύρματα του θερμοζεύγους είναι συνδεδεμένα ώστε να έχουν ηλεκτρική επαφή. Η επαφή αυτή καλείται θερμή επαφή και βρίσκεται σε θερμοκρασία T. Τα δύο άλλα άκρα των συρμάτινων αγωγών δεν βρίσκονται σε επαφή, βρίσκονται σε θερμοκρασία αναφοράς (ψυχρή επαφή) και είναι συνδεδεμένα με ακροδέκτες βολτομέτρου.

Η εφαρμογή βαθμίδας θερμοκρασίας μεταξύ των άκρων ενός υλικού προκαλεί αύξηση της μέσης ενέργειας των ηλεκτρονίων στη θερμή επαφή και κίνηση τους προς την επαφή του αγωγού που βρίσκεται στην χαμηλότερη θερμοκρασία, προκαλώντας διάχυση ηλεκτρονίων. Αποτέλεσμα της παραπάνω κίνησης είναι η συσσώρευση ηλεκτρονίων στην ψυχρή επαφή και πλεόνασμα θετικού φορτίου στην επαφή που βρίσκεται στην υψηλότερη θερμοκρασία. Η διαφορά συγκέντρωσης των ηλεκτρονίων προκαλεί τη δημιουργία δυναμικού, εξαιτίας μετατόπισης φορτίων.

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων του αγωγού είναι ανάλογη με το πλήθος ηλεκτρονίων που έχουν μετατοπισθεί, δηλαδή αυξάνει με την διαφορά $\Delta\theta=\theta-\theta_o$, όπου θ η θερμοκρασία της θερμής επαφής και $\theta_0$ η θερμοκρασία της ψυχρής επαφής (Σχήμα 1). Ως θερμοκρασία ψυχρής επαφής μπορούμε για παράδειγμα να θεωρήσουμε την θερμοκρασία του εργαστηρίου.




*Σχήμα 1: Θερμοζεύγος*

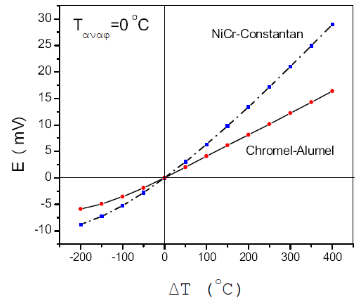
Στην περίπτωσή μας το θερμοστοιχείο είναι σιδήρου-κονσταντάνης. Ένα ***πλεονέκτημα*** αυτού του θερμοηλεκτρικού θερμομέτρου ότι καλύπτει ευρεία περιοχή τιμών, έως και 800°C.

## 2. Προσδιορισμός καμπύλης βαθμονόμησης

Για πολλά θερμοζεύγη η συνάρτηση E=f(Δθ) περιγράφεται με την εξής δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$\mathbf{E=\alpha\Delta\theta+\beta(\Delta\theta)^2} \qquad (1)$$

όπου οι συντελεστές α και β είναι ανεξάρτητοι της θερμοκρασίας και εξαρτώνται μόνο από την φύση των δύο αγωγών από τους οποίους είναι κατασκευασμένο το θερμοζεύγος. Ο συντελεστής β μπορεί να θεωρηθεί ίσος με το μηδέν (β=0), όταν οι αγωγοί από τους οποίους είναι κατασκευασμένο το θερμοζεύγος είναι κράματα μετάλλων (Σχήμα 2). Μόνο στην περίπτωση όπου οι μεταλλικοί αγωγοί του θερμοζεύγους είναι κατασκευασμένοι από καθαρά μέταλλα ο συντελεστής β λαμβάνει τιμή διαφορετική του μηδενός.



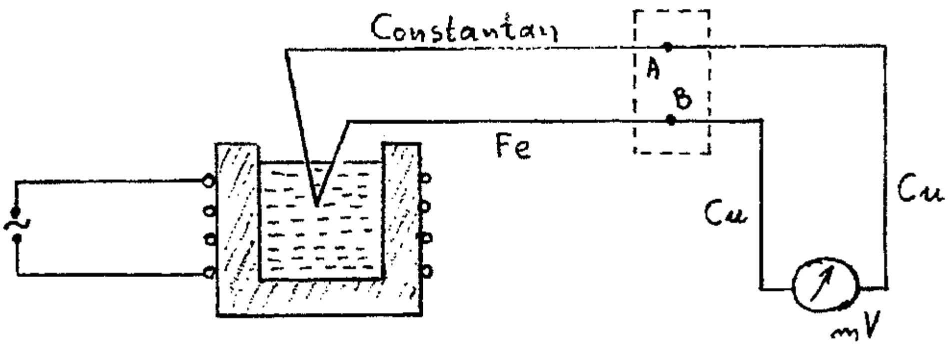

*Σχήμα 2: Καμπύλη βαθμονόμησης των συνηθισμένων θερμοστοιχείων NiCr-Constantane και Chromed-Alumel.*

Για την ***βαθμονόμηση του θερμοζεύγους*** θα θεωρήσουμε ότι η θερμοκρασία της ψυχρής επαφής είναι σταθερή και ίση με την θερμοκρασία του εργαστηρίου, που μετράται με θερμόμετρο αναρτημένο στο χώρο που διεξάγεται το πείραμα. Η θερμή επαφή φέρεται σε σώματα που βρίσκονται σε γνωστές θερμοκρασίες. Αυτές είναι: το σημείο τήξης του κασσιτέρου ($T_{Sn}$=505 K), η θερμοκρασία βρασμού του νερού ($T_{H2Oβρασμ}$=373 K), η θερμοκρασία τήξης του πάγου ($T_{H2Oπαγ}$=273 K), και το σημείο που συνυπάρχουν η υγρή και η αέρια φάση για το $N_2$ ($T_{N2}$=77.4 K) υπο πίεση P=1 bar. Η θερμοκρασία της ψυχρής επαφής $\theta_0$ είναι ίση με την θερμοκρασία του περιβάλλοντος εργαστηριακού χώρου και θεωρείται σταθερή καθ' όλη την διάρκεια της πειραματικής διαδικασίας.

Για κάθε γνωστή διαφορά θερμοκρασίας $\Delta\theta=\theta-\theta_o$ μετρούμε με το συνδεδεμένο βολτόμετρο στην ψυχρή επαφή, την αντίστοιχη θερμοηλεκτρική τάση E. Απεικονίζοντας το σύνολο των μετρήσεων (E, Δθ) γραφικά προκύπτει η καλούμενη «καμπύλη βαθμονόμησης» του θερμοζεύγους.

## 3. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη (Σχήμα 3) αποτελείται: α) από το θερμοζεύγος Fe-Constantan, β) ένα βολτόμετρο (ένδειξη σε mV), γ) δοχείο που περιέχει κασσίτερο Sn, δ) ποσότητα παγοκύβων, ε) σύστημα ηλεκτρικής θέρμανσης για την τήξη του Sn ή τον βρασμό του νερού, στ) χρονόμετρο.




*Σχήμα·3. Πειραματική διάταξη*

## Πειραματική διαδικασία

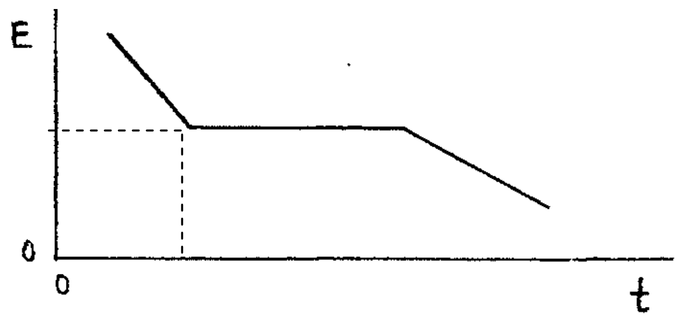
1. Θερμαίνεται ο κασσίτερος (Sn) σε θερμοκρασία μεγαλύτερη από το σημείο τήξης του. Αυ-

τό φαίνεται από την ρευστοποίηση αρχικά της επιφανείας του. Κατόπιν, βυθίζουμε το ένα άκρο του θερμοστοιχείου στον κασσίτερο και, διακόπτοντας την θέρμανση, μετρούμε την θερμοηλεκτρική τάση Ε ανά 0.5 min μέχρι να πήξει τελείως το μέταλλο. Όλες οι μετρήσεις και τα υπολογιζόμενα μεγέθη καταγράφονται σε πίνακες, όπως στα παρακάτω υποδείγματα. Είναι προφανές, ότι η έκταση του πίνακα 1 θα καθορισθεί από το πλήθος των τιμών κάθε πίνακα. Μετά το τέλος των μετρήσεων, για να εξάγουμε το θερμοστοιχείο από το μέταλλο, το ξαναθερμαίνουμε.

| Πίνακας 1 (τιμές Sn) | |
|---|---|
| t (min) | E (mV) |
| 0.0 | |
| 0.5 | |
| 1.0 | |
| 1.5 | |
| ... | |

| Πίνακας 2 (μετρήσεις) | | |
|---|---|---|
| Επαφή θερμοζεύγους | E (mV) | Δθ (°C) |
| Θερμοκρασία περιβάλλοντος | 0 | 0 |
| Σημείο πήξεως Sn | | |
| Νερό με ατμό (βρασμός) | | |
| Νερό με πάγο | | |
| Υγρό άζωτο | | |

2. Αποδίδουμε γραφικά τα αποτελέσματα των μετρήσεων Ε=Ε(t) του βήματος 1 και προσδιορίζουμε την τιμή της Ε που αντιστοιχεί στο σημείο πήξεως του Sn. Είναι $\theta_{πηξ,Sn}$=232°C.




*Σχήμα 4. Μεταβολή της θερμοκρασίας με το χρόνο κατά την πήξη του Sn*

3. Τοποθετούμε σε δοχείο που περιέχει νερό θραύσματα πάγου και μετρούμε την Ε για το σημείο τήξης του πάγου ($\theta_{τηξ\ πάγου}$ =0° C)
4. Σε σημείο που συνυπάρχει η αέρια και η υγρή φάση του αζώτου μετρούμε την τάση Ε εφόσον η τιμή σταθεροποιηθεί.
5. Μετρούμε την Ε στο σημείο βρασμού του νερού. Είναι $\theta_{βρασμού\ νερού}$=100°C.
6. Καταγράφουμε την θερμοκρασία του χώρου του εργαστηρίου $\theta_{εργ}$.
7. Από τα ζεύγη τιμών Ε, Δθ, θεωρώντας Δθ=θ-$\theta_{εργ}$ χαράζουμε την καμπύλη βαθμονόμησης του θερμοστοιχείου, λαμβάνοντας υπόψη ότι για Δθ=0 είναι Ε=0, δηλαδή στην θερμοκρασία του εργαστηρίου.

## Βιβλιογραφία

1. Αλεξόπουλος Κ. *Γενική Φυσική, τόμος 4ος, Θερμότητα*, Αθήνα 1962
2. Αλεξόπουλος Κ, Μαρίνος Δ, *Γενική Φυσική, τόμος 2ος, Ηλεκτρισμός*, Παπαζήση, Αθήνα 1993

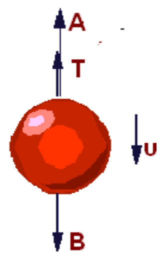
## Απαραίτητες γνώσεις (από οποιαδήποτε πηγή)

Τήξη, πήξη, βρασμός, θερμοηλεκτρικό φαινόμενο, θερμοστοιχείο.

# 2.3. Μέτρηση του συντελεστή εσωτερικής τριβής υγρών με την πτώση μικρών σφαιρών

## 1. Στοιχεία από τη Θεωρία

Αφήνουμε μια σφαίρα να πέσει μέσα σε ένα υγρό, του οποίου ζητάμε το συντελεστή εσωτερικής τριβής. Πάνω στη σφαίρα, εκτός από το βάρος της, ασκούνται και δυο άλλες δυνάμεις, η άνωση και η αντίσταση (αντίσταση Stokes). Η κίνηση της σφαίρας στην αρχή είναι επιταχυνόμενη. Όσο αυξάνει όμως η ταχύτητα αυξάνεται και η αντίσταση, θα φθάσει δε στιγμή κατά την οποία οι τρεις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη σφαίρα θα ισορροπήσουν. Από αυτή τη στιγμή η σφαίρα θα αποκτήσει οριακή ταχύτητα $\upsilon_{o\rho}$, με την οποία θα εξακολουθήσει να κινείται.




*Σχήμα 1: Δυνάμεις που ασκούνται σε σφαίρα που κινείται με ταχύτητα υ μέσα σε υγρό.*

Η αντίσταση που συναντά κατά την πτώση της η σφαίρα εξαρτάται από την μορφή της ροής (στρωτή ή τυρβώδης), που πάλι εξαρτάται από την τιμή του αριθμού Reynolds (R). Αυτός είναι καθαρός αριθμός, η τιμή του είναι σταθερή για όλες τις μηχανικά όμοιες ροές και δίνεται από τη σχέση:

$$R = \upsilon \cdot \rho \cdot d/\eta \qquad (1)$$

όπου $\upsilon$ η ταχύτητα της σφαίρας, $\rho$ η πυκνότητα του υγρού, $d$ η διάμετρος της σφαίρας και $\eta$ ο συντελεστής εσωτερικής τριβής του υγρού.

Αν λοιπόν γνωρίζουμε τα $\rho$, $d$, $\eta$ μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή του R, μετρώντας πειραματικά την ταχύτητα της σφαίρας.

Αν R< $R_{\kappa\rho}$ η ροή θα είναι στρωτή (για τη σφαίρα $R_{\kappa\rho}$=10), οπότε η αντίσταση του υγρού στην κίνηση της σφαίρας T δίνεται από τον τύπο του Stokes, που στην οριακή περίπτωση ($\upsilon = \upsilon_{o\rho}$) δίνει:

$$T = 6\pi r_1 \eta \upsilon_{o\rho} \qquad (2)$$

Στην περίπτωση που η σφαίρα κινείται μέσα στο υγρό με την οριακή της ταχύτητα $\upsilon_{o\rho}$, η συνισταμένη των δυνάμεων, δηλ. του βάρους Β, της άνωσης Α και της αντίστασης Τ, είναι ίση με μηδέν:

$$\mathrm{B} = \mathrm{A} + \mathrm{T} \rightarrow m_1 g = \varepsilon V + 6\pi r_1 \eta \upsilon_{o\rho} \qquad (3)$$

Σε ένα ομογενές σώμα μάζας m και όγκου V, ονομάζουμε πυκνότητα $\rho$ του υλικού το πηλίκο της μάζας δια του όγκου, και ειδικό βάρος $\varepsilon$ το πηλίκο του βάρους δια του όγκου, συνεπώς:

$$\rho = m/V \text{ και } \varepsilon = mg/V \text{, άρα } \varepsilon = \rho g .$$

Αντικαθιστούμε ως $\rho_1$ και $\rho$ την πυκνότητα της σφαίρας και του υγρού, αντιστοίχως $\varepsilon_1$ και $\varepsilon$ τα ειδικά τους βάρη στην εξίσωση (3). Επιλύοντας, προκύπτει η μετρούμενη τιμή του συντελεστή εσωτερικής τριβής $\eta_{\mu\varepsilon\tau\rho}$.

Επιλύοντας αυτή τη σχέση, μετά την αντικατάσταση των αντιστοίχων μεγεθών, υπολογίζουμε την τιμή του συντελεστή εσωτερικής τριβής:

$$\eta_{\mu\varepsilon\tau\rho} = \frac{2}{9} r^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\upsilon_{o\rho}} \qquad (4)$$

Η σχέση για το $\eta$ θα ήταν ακριβής εάν το κυλινδρικό δοχείο είχε αφ' ενός μεν άπειρο μήκος, αφ' ετέρου δε άπειρη ακτίνα. Κανένα όμως από τα παραπάνω δε συμβαίνει με αποτέλεσμα να έχουμε σφάλμα στην τιμή του $\eta$. Η επίδραση του πεπερασμένου μήκους του σωλήνα μειώνεται αισθητά, αν οι μετρήσεις λαμβάνονται σε αρκετό βάθος από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Η επίδραση της πεπερασμένης τιμής της ακτίνας, που είναι και η πιο σημαντική, μπορεί να διορθωθεί με τη χρήση του τύπου:

$$\eta_{\delta\iota o\rho\theta} = \eta_{\mu\varepsilon\tau\rho} \Big/ \left(1 + 2.4\pi r_1 / r_2\right) \qquad (5)$$

όπου $r_1$ η ακτίνα της σφαίρας και $r_2$ η εσωτερική ακτίνα του κυλινδρικού δοχείου, και να υπολογιστεί η διορθωμένη τιμή του συντελεστή εσωτερικής τριβής $\eta_{\delta\iota o\rho\theta}$ .

### Μονάδες του συντελεστή εσωτερικής τριβής

Για θεωρητικούς υπολογισμούς χρησιμοποιείται ως μονάδα του συντελεστή εσωτερικής τριβής το 1g cm$^{-1}$ s$^{-1}$ = 1 Poise (1P) (από τον Poiseuille) και στο S.I. μονάδα είναι το 1 kg m$^{-1}$ s$^{-1}$ (το 1P είναι ίση με το 1/10 της μονάδας του S.I.).

Στα μηχανέλαια μετράται ο συντελεστής εσωτερικής τριβής από το χρόνο εκροής από ένα δοχείο με οπή στο πυθμένα του με συμβατικές μονάδες, π,χ. *SAE 40*.

## 2. Πειραματική διαδικασία

1. Για την μάζα των σφαιριδίων $\mathbf{m_1}$ και την διάμετρό τους $\mathbf{d_1}$, χρησιμοποιούμε τιμές που δίνονται από τον διδάσκοντα στην άσκηση.
2. Εκτιμούμε τα σφάλματα $\mathbf{\delta m_1}$ και $\mathbf{\delta r_1}$.
3. Υπολογίζουμε την πυκνότητα του υλικού των σφαιριδίων και το σφάλμα της.
4. Με πυκνόμετρο μετρούμε την πυκνότητα του υγρού.
5. Αφήνουμε μια σφαίρα, από την επιφάνεια του υγρού, να πέσει. Μετρούμε με χρονόμετρο το χρόνο που χρειάζεται η σφαίρα για να πέσει από ένα επίπεδο **α**, που βρίσκεται σε κάποιο βάθος από την επιφάνεια του υγρού, σε ένα επίπεδο **β**, που βρίσκεται κοντά στον πυθμένα του δοχείου. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο και για τις υπόλοιπες εννέα (9) σφαίρες.
6. Μετρούμε την απόσταση **αβ** των δυο επιπέδων και υπολογίζουμε την ταχύτητα κάθε σφαίρας.
7. Υπολογίζουμε τη μέση τιμή της ταχύτητας των σφαιρών $\upsilon_{o\rho}$ καθώς και το σφάλμα της.
8. Υπολογίζουμε την «μετρούμενη» τιμή του συντελεστή $\eta_{\mu\varepsilon\tau\rho}$, την μέση τιμή του $\overline{\eta}_{\mu\varepsilon\tau\rho}$ , καθώς και το σφάλμα της μέσης τιμής του, $\delta\overline{\eta}_{\mu\varepsilon\tau\rho}$ .
9. Μετρούμε την εσωτερική ακτίνα $r_2$ του κυλινδρικού δοχείου και από την διορθωτική σχέση βρίσκουμε την διορθωμένη τιμή για το $\eta$ ($\eta_{\delta\iota o\rho\theta}$ ).
10. Από τις τιμές, του συντελεστή εσωτερικής τριβής $\eta_{\delta\iota o\rho\theta}$ και της μέσης ταχύτητας των σφαιρών, υπολογίζουμε τον αριθμό Reynolds.

## Απαραίτητες γνώσεις (από οποιαδήποτε πηγή)

Εσωτερική τριβή, Ροή πραγματικού ρευστού γύρω από σφαίρα, Αριθμός Reynolds, Μέθοδοςι μέτρησης του συντελεστή εσωτερικής τριβής υγρών

# Εισαγωγή στη θεωρία των σφαλμάτων

Συγγραφή του παρόντος φυλλαδίου: Αν. Καθηγητής Χρήστος Τρικαλινός
Χρήσιμες και ουσιαστικές παρατηρήσεις έκανε η Δρ. Σ. Καρατάσου

## Περιεχόμενα

# Εισαγωγή

Το πείραμα ουσιαστικά αποτελεί την πηγή της γνώσης στη Φυσική. Όλη η δραστηριότητα του ανθρώπου στην ιστορία της Φυσικής, όλες οι επαναστάσεις στην επιστήμη ακολουθούν λίγο - πολύ την ίδια λογική, το ίδιο θα λέγαμε "σχήμα", ανεξάρτητα αν σ' αυτή την πορεία συμμετέχει ο ίδιος άνθρωπος ή ακόμη κι η ίδια γενιά επιστημόνων. Αυτή η πορεία θα μπορούσε σχηματικά να περιγραφεί ως εξής: πείραμα (παρατήρηση) που τα αποτελέσματά του ξεφεύγουν από τα όρια του θεωρητικά επιπέδου που έχει διαμορφωθεί τη δοσμένη χρονική στιγμή - γενίκευση των αποτελεσμάτων και διατύπωση της θεωρίας που από τη μια μεριά εξηγεί τα νέα φαινόμενα αλλά και αυτά που εξηγούνταν στα πλαίσια της "παλιάς" θεωρίας - πρόβλεψη νέων φαινομένων που είναι δυνατόν να παρατηρηθούν πειραματικά - νέα πειράματα για την μελέτη των καινούριων φαινομένων - βελτίωση της θεωρίας στη βάση των αποτελεσμάτων τους και προσδιορισμός των ορίων που αυτή ισχύει - πειράματα που τα αποτελέσματά τους βγαίνουν έξω από τα όρια της θεωρίας κλπ.

Βλέπουμε δηλαδή την τεράστια σημασία του πειράματος στη διαδικασία της γνώσης της φύσης.

Είναι λοιπόν φυσιολογικό και απαραίτητο η διδασκαλία του μαθήματος να συνοδεύεται από το εκπαιδευτικό εργαστήριο, το οποίο βέβαια εξαρτάται από το περιεχόμενο του μαθήματος και το επίπεδο γνώσεων του ασκούμενου σ' αυτό.

Συνήθως σήμερα όταν γίνεται λόγος για πειραματική φυσική στο μυαλό των ανθρώπων έρχονται σύγχρονες ηλεκτρονικές συσκευές, τεράστιοι επιταχυντές, ακτίνες λέιζερ κ.τ.λ.

Έτσι πολλές φορές ο φοιτητής που έρχεται σ' επαφή με το εκπαιδευτικό εργαστήριο νιώθει μια κάποια απογοήτευση, ακόμη κι όταν αυτό είναι τέλεια οργανωμένο. Αυτό συμβαίνει κύρια στα πρώτα εξάμηνα. Δεν είναι σπάνιο το φαινόμενο ο φοιτητής να νιώθει απογοήτευση διότι θα πρέπει να μετρήσει με στοιχειώδη όργανα ποσότητες που η ανθρωπότητα τις έχει προσδιορίσει με τεράστια ακρίβεια δεκάδες ή και εκατοντάδες χρόνια πριν.

Όπως θα προσπαθήσουμε να δείξουμε πολύ σύντομα στις σελίδες που ακολουθούν, αλλά και όπως θα μπορέσει να καταλάβει όποιος ασχοληθεί λίγο πολύ σοβαρά με τη διεξαγωγή κάποιου πειράματος, αυτό κάθε άλλο παρά απλή υπόθεση είναι. Ο φυσικός, άσχετα αν θεωρεί τον εαυτό του πειραματικό ή θεωρητικό, ανεξάρτητα από το αν ασχολείται με την έρευνα ή την εκπαίδευση, αν θέλει να κατέχει το αντικείμενο της δουλειάς του πρέπει να κατανοεί σε βάθος τις διαδικασίες της φύσης. Όπως εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει «πλήρης» ή «απόλυτη» γνώση δεν υπάρχει ούτε μπορεί να υπάρξει. Κριτήριο πάντως της ορθότητάς της στη φυσική ήταν και είναι το πείραμα.

Επομένως πειραματική διαδικασία δεν είναι, ούτε μπορεί να είναι κάποιες συσκευές με πολύχρωμα λαμπάκια και πολλά κουμπιά, αλλά ότι κρύβεται πίσω απ' αυτές και η καλή γνώση των δυνατοτήτων όλων αυτών των συσκευών.

Με βάση αυτά, αλλά λαμβάνοντας υπόψη και την σημερινή πραγματικότητα της εκπαίδευσης στη χώρα μας, δηλαδή το γεγονός της μηδενικής εμπειρίας των μαθητών στο εργαστήριο, είναι οργανωμένο το εκπαιδευτικό εργαστήριο.

Πολλές φορές θα μπορούσαμε με μικρά σχετικά έξοδα να αυτοματοποιήσουμε κάποιες ασκήσεις, όμως πιστεύουμε ότι η χρήση απλών οργάνων και μεθόδων βοηθάει στην καλύτερη κατανόηση της ουσίας. Αυτό φυσικά δεν σημαίνει και πλήρη άρνηση των σύγχρονων συσκευών και μεθόδων.

Ποιοι είναι λοιπόν οι στόχοι του εκπαιδευτικού εργαστηρίου;

Αν προσπαθήσουμε ν' απαντήσουμε σ' αυτή την ερώτηση θα μπορούσαμε να πούμε τα εξής:

α) Να μπορέσουν οι φοιτητές να δουν στην πράξη τους βασικότερους θεωρητικούς νόμους της φυσικής.

β) Να αποκτήσουν πείρα στη διεξαγωγή του πειράματος και στην επεξεργασία των αποτελεσμάτων του.

γ) Να γνωριστούν με τα διάφορα όργανα και τον τρόπο χρησιμοποίησής τους.

δ) Να κατανοήσουν πως σχεδιάζεται και πως «στήνεται» ένα πείραμα και με ποιες δυσκολίες έρχεται αντιμέτωπος ο φυσικός στη προσπάθεια που κάνει να μετρήσει τα μεγέθη που θέλει.

ε) Να γνωριστούν με φαινόμενα που δεν περιλαμβάνονται στην ύλη του μαθήματος και δεν μπορούν να διδαχτούν λόγω έλλειψης χρόνου.

Όπως θα προσπαθήσουμε να δείξουμε παρακάτω, ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα κατά την εκτέλεση ενός πειράματος είναι τα **ΣΦΑΛΜΑΤΑ** που υπεισέρχονται στις μετρήσεις. Η γνώση τους αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την επιτυχία κάποιου πειράματος. Η δε προσπάθεια μείωσής τους μπορεί να οδηγήσει σε τεράστια αύξηση του κόστους ή ακόμη και σε αδιέξοδες καταστάσεις.

Σ' αυτό ακριβώς το πρόβλημα είναι αφιερωμένες οι σελίδες που ακολουθούν.

Οι σημειώσεις αυτές δεν έχουν σκοπό να παρουσιάσουν τη θεωρία των σφαλμάτων που είναι αρκετά εκτεταμένη και μερικές φορές πολύπλοκη ιδιαίτερα για το επίπεδο του φοιτητή που μόλις ξεκινά την πορεία του στο Φυσικό. Εξάλλου οι βάσεις της πρέπει να διδαχτούν στο αντίστοιχο μάθημα των Μαθηματικών.

Σαν σκοπό βάλαμε απλά να δώσουμε στους φοιτητές να καταλάβουν την έννοια των σφαλμάτων, τη σπουδαιότητά τους και την αναγκαιότητα υπολογισμού τους. Δίνονται επίσης οι βασικοί μαθηματικοί τύποι που επιτρέπουν στο φοιτητή να δουλεύει με τα σφάλματα τουλάχιστον στο επίπεδο των εργαστηρίων Φυσικής I-IV.

Παράλληλα παρουσιάζονται οι βάσεις της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων και το κριτήριο του Chauvenet που κατά την γνώμη μας αποτελούν ένα χρήσιμο εφόδιο.

Στο τελευταίο μέρος του φυλλαδίου δίνονται και ορισμένες χρήσιμες πληροφορίες για τη χάραξη των γραφικών παραστάσεων, καθώς και ορισμένες συμβουλές τόσο για την πραγματοποίηση των μετρήσεων, όσο και για την επεξεργασία των αποτελεσμάτων.

Δυστυχώς στην Ελληνική βιβλιογραφία δεν υπάρχει ολοκληρωμένο βιβλίο που να συνδυάζει τη θεωρία των σφαλμάτων με το πειραματικό εργαστήριο. Μόνο στα βιβλία των εργαστηρίων Φυσικής του Ε.Μ.Π. και του Πανεπιστημίου της Θεσσαλονίκης θα μπορούσε να βρει κανείς ορισμένα χρήσιμα πράγματα.

Για όσους Φοιτητές ενδιαφέρονται θα μπορούσαμε να συστήσουμε τα βιβλία:

An introduction to error analysis by J. R. Taylor, A series of Books in Physics Eugene D. Cummins, Editor University Science Books, Mill Valley, California

Practical Physics, by G.L.Squires, McGraw-Hill, London

# Έννοια του σφάλματος

## Η μέτρηση

Συστατικό στοιχείο και τελικός σκοπός του πειράματος είναι η μέτρηση, δηλαδή η σύγκριση κάποιου μεγέθους με κάποιο άλλο "πρότυπο" που διαθέτει η συσκευή που χρησιμοποιούμε στο πείραμά μας. Έτσι όταν μετρούμε το μήκος συγκρίνουμε το μήκος που μετράμε με ένα "πρότυπο" μέτρο, όταν μετρούμε την τάση ή την ένταση του ρεύματος τη συγκρίνουμε με γνωστές τάσεις ή εντάσεις που μας βοήθησαν να βαθμολογήσουμε το βολτόμετρο ή το αμπερόμετρο κ.τ.λ.

Έτσι λοιπόν σε κάθε πείραμα, σε κάθε μέτρηση, πρέπει πάντα να φροντίζουμε ώστε το "πρότυπο" μέγεθος να είναι σωστό και να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις που ο πειραματικός βάζει όταν ετοιμάζει το πείραμα. Τι σημαίνει αυτό θα το δούμε παρακάτω.

## Τα σφάλματα

Ας δούμε τώρα πως στην πράξη γίνεται μια μέτρηση και μάλιστα σ' ένα πολύ απλό παράδειγμα, που από πρώτη άποψη λίγο μοιάζει με πείραμα φυσικής.

Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να μετρήσουμε το ύψος ενός κουφώματος για να βάλουμε μια πόρτα. Αυτή η μέτρηση μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους.

α) Ένας έμπειρος ξυλουργός κοιτάζοντας το κούφωμα (χρησιμοποιώντας δηλαδή σαν όργανο μέτρησης το μάτι του σε συνδυασμό με την εμπειρία που έχει) λέει ότι το ύψος είναι περίπου 210 cm. Ύστερα όμως από λίγη σκέψη προσθέτει ότι το ύψος της βρίσκεται ανάμεσα στα 205 cm και τα 215 cm. Δηλαδή έχουμε :

$205\,cm \le h_1 \le 215\,cm$ ή αλλιώς $h_1 = (210 \pm 5)\,cm.$

β) Φυσικά ο ξυλουργός δεν είναι ικανοποιημένος μόνο απ' αυτό. Με το μέτρο του μετράει τώρα το κούφωμα και βρίσκει 211.3 cm. Εμείς όμως λαμβάνουμε υπ' όψη μας ότι στη μέτρηση αυτή μπορούν να επιδράσουν διάφοροι παράγοντες (π.χ. θερμική διαστολή, κατασκευή και τοποθέτηση του μέτρου, το γεγονός ότι ένα συνηθισμένο μέτρο δεν έχει υποδιαιρέσεις πιο συχνές από 0.1 cm κ.τ.λ.) και γι' αυτό για μεγαλύτερη σιγουριά γράφουμε:

$211.25\,cm \le h_2 \le 211.35\,cm$ ή $h_2 = (211.30 \pm 0.05)\,cm.$

γ) Ιδιοκτήτης όμως του διαμερίσματος είναι ένας φυσικός που θέλει να πάρει μια καλύτερη απάντηση στο ερώτημα πόσο είναι το ύψος του κουφώματος. Χρησιμοποιεί μια συσκευή ακριβείας (π.χ. ένα συμβολόμετρο) και κάνοντας μια μέτρηση βρίσκει ότι το ύψος είναι 211.300158 cm. Αλλά και πάλι δεν μπορεί να είναι σίγουρος τι συμβαίνει με τα επόμενα δεκαδικά ψηφία, γι' αυτό γράφει:

$211.3001575\,cm \le h_3 \le 211.3001585\,cm$ ή $h_3 = (211.3001580 \pm 0.0000005)\,cm.$

Ποια είναι λοιπόν η σωστή μέτρηση; Προφανώς σωστές είναι και οι τρεις. Μόνο που διαφέρουν ως προς την ακρίβειά τους, ή όπως αλλιώς λέμε ως προς το "σφάλμα" τους ( δηλ. την ποσότητα που είναι μετά το $\pm$ ).

Αν τώρα το ερώτημα τεθεί διαφορετικά: **Ποιο είναι το ύψος του κουφώματος;** Εδώ και πάλι από μια άποψη θα μπορούσαμε ν' απαντήσουμε : Και το $h_1$ και το $h_2$ και το $h_3$. Όμως η ερώτηση αυτή αποκτάει συγκεκριμένο νόημα αν ξέρουμε για ποιο λόγο μας χρειάζεται το ύψος αυτό. Έτσι π. χ. στη συγκεκριμένη περίπτωση, για την τοποθέτηση της πόρτας αρκεί να ξέρουμε το $h_2$. Αν μας έχει δοθεί μόνο το $h_1$ πιθανόν η πόρτα που θα φτιάξουμε να μην ταιριάζει ενώ το $h_3$ περιέχει πολλές πληροφορίες που για τον ξυλουργό είναι περιττές πολυτέλειες πολύ δε περισσότερο επειδή είναι σίγουρο πως με τα εργαλεία που διαθέτει είναι αδύνατο να πετύχει τέτοια ακρίβεια στην κατασκευή της πόρτας.

Συνοψίζοντας λοιπόν μπορούμε να πούμε **ότι ο όρος "σφάλμα" στην επιστημονική γλώσσα σημαίνει την αναπόφευκτη, αριθμητικά εκφρασμένη, έλλειψη ακρίβειας που υπάρχει στη μέτρηση ενός μεγέθους σ' όλα τα πειράματα καθώς και τις τυχόν ατέλειες ή ελαττωματικότητας των οργάνων και των μεθόδων μας.**

Ορισμένα σφάλματα (τα λεγόμενα **συστηματικά**, τα οποία θα δούμε παρακάτω) μπορούν ν' αποφευχθούν. Είναι αδύνατον όμως να κάνουμε πείραμα χωρίς σφάλμα. Μπορούμε βέβαια να "ελαχιστοποιήσουμε" τα σφάλματα του συγκεκριμένου πειράματος. Κάτι τέτοιο έγινε στην περίπτωση γ) του παραδείγματός μας. Αυτό όμως δεν μας χρειαζόταν και θα μπορούσαμε να το είχαμε αποφύγει. Έτσι και στο πείραμα της φυσικής. Πάντα πρέπει να ξέρουμε :

* Τι ακρίβεια μπορούμε να πετύχουμε και

* Τι ακρίβεια εμείς επιθυμούμε.

Με αυτό τον τρόπο και ανεπιθύμητα προβλήματα μπορούμε ν' αποφύγουμε, και πολυδάπανες αλλά άχρηστες στην ουσία εγκαταστάσεις και περιττό κόπο να γλιτώσουμε.

## Είναι πραγματικά αναπόφευκτα τα σφάλματα;

Παρακάτω θα μιλήσουμε για σφάλματα που οφείλονται κύρια στις ατέλειες των οργάνων μας που στο εκπαιδευτικό εργαστήριο είναι βασικά μέτρα, χρονόμετρα, ζυγοί, βολτόμετρα, αμπερόμετρα κ.τ.λ. Κάποιος μπορεί εδώ να πει ότι τα σύγχρονα όργανα που χρησιμοποιούνται σε πολλά πειράματα της φυσικής επιτρέπουν τεράστια ακρίβεια στις μετρήσεις μας και αυτό είναι σωστό.

Μπορούμε όμως ν' αυξάνουμε αυτή την ακρίβεια απεριόριστα; Αποδεικνύεται ότι όχι! Αιτία είναι η ίδια η ουσία της ύλης και ο στατιστικός χαρακτήρας των ίδιων των σωματιδίων. Χωρίς να θέλουμε να επεκταθούμε περισσότερο σ' αυτά τα ζητήματα θα πούμε ότι ο στατιστικός αυτός χαρακτήρας φαίνεται ξεκάθαρα από την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg, μια έκφραση της οποίας είναι η σχέση:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \qquad (1.1)$$

όπου $\Delta p$ το σφάλμα στον προσδιορισμό της ορμής, $\Delta x$ το σφάλμα στον προσδιορισμό της θέσης του σωματιδίου και $h$=6.626176·$10^{-27}$ erg·s, η σταθερά του Plank.

Όπως φαίνεται και από τη σχέση (1.1) είναι αδύνατον να προσδιορίσουμε π.χ. το $x$ με απόλυτη ακρίβεια ( $\Delta x \to 0$) διότι τότε το $p$ δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ( $\Delta p \to \infty$ ) .

## Γιατί πρέπει να ξέρουμε τα σφάλματα;

Πολλές φορές (ιδιαίτερα όταν τα πειραματικά αποτελέσματα είναι πολύ κοντά σ' αυτά που προβλέπει η βιβλιογραφία) ο φοιτητής αρχίζει να σκέπτεται μήπως είναι άδικος κόπος ο υπολογισμός των σφαλμάτων, ή μήπως αποτελεί ένα «εργαλείο» συνεχούς ελέγχου των φοιτητών.

Δυστυχώς όμως, αν δεν ξέρουμε τα σφάλματα δεν μπορούμε να βγάλουμε ορισμένα συμπεράσματα για το φυσικό περιεχόμενο του πειράματος.

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι θέλουμε να δούμε, αν εξαρτάται η αντίσταση ενός πηνίου από τη θερμοκρασία. Κάνουμε μετρήσεις για δυο διαφορετικές θερμοκρασίες και λαμβάνουμε:

200.025 Ohm για $10^{o}$ C

200.034 Ohm για $20^{o}$ C

Υπάρχει διαφορά σ' αυτές τις τιμές; Αν δεν ξέρουμε το σφάλμα δεν μπορούμε ν' απαντήσουμε.

Αν όμως ξέρουμε ότι το σφάλμα είναι 0.001 Ohm μπορούμε να πούμε ναι. Αν αντίθετα το σφάλμα είναι 0.01 Ohm δεν μπορούμε και πάλι ν' απαντήσουμε και χρειάζεται να βελτιώσουμε την ακρίβεια του πειράματός μας.

Ένα άλλο παράδειγμα. Πολλές φορές στο εργαστήριο θα χρειαστεί να ελέγξουμε αν δυο τιμές είναι ίσες. Για παράδειγμα οι τιμές $a_1$=3.62 και $a_2$=3.38 ή οι τιμές $b_1$=2.82 και $b_2$=2.88.

Σε ένα τέτοιο ερώτημα η συνηθισμένη απάντηση του φοιτητή είναι ότι οι τιμές $b_1$ και $b_2$ είναι περίπου ίσες, ενώ οι $a_1$ και $a_2$ όχι.

Ας γράψουμε τώρα πλήρως τις πιο πάνω τιμές με τα σφάλματά τους:

$$a_1 = 3.62 \pm 0.29, \qquad a_2 = 3.38 \pm 0.26$$

$$b_1 = 2.820 \pm 0.006 \qquad b_2 = 2.880 \pm 0.008$$

Από τις παραπάνω τιμές γίνεται σαφές πως τα συμπεράσματά μας αντιστρέφονται πλήρως και πρέπει να πούμε ότι τα $a_1$ και $a_2$ είναι περίπου ίσα, ενώ τα $b_1$ και $b_2$ όχι.

Πολλά είναι τα παραδείγματα στην τεχνική αλλά και στην επιστήμη που μας δείχνουν την αναγκαιότητα γνώσης του σφάλματος.

# Συστηματικά και τυχαία σφάλματα

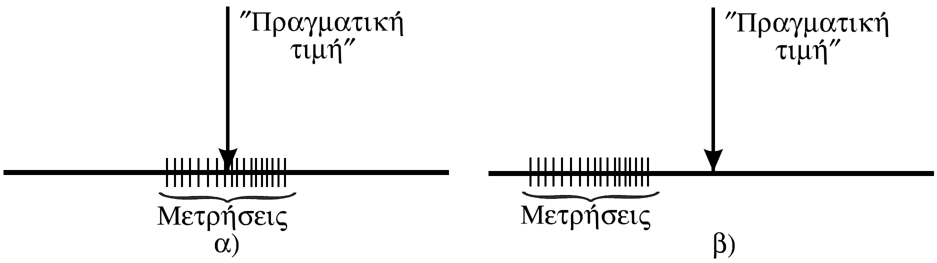
## Τι είναι τα συστηματικά και τι τα τυχαία σφάλματα

Ας υποθέσουμε ότι με ένα χρονόμετρο μετρούμε πολλές φορές το χρόνο που κάνει να διανύσει μια απόσταση ένα κινητό στο εργαστήριο. Είναι τότε σίγουρο, ότι, αν το χρονόμετρο που χρησιμοποιούμε μπορεί να μετρά π.χ. εκατοστά του δευτερολέπτου, σχεδόν όλες οι μετρήσεις μας θα είναι διαφορετικές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι είναι αντικειμενικά αδύνατο να έχουμε κάθε φορά **όλες** τις συνθήκες ίδιες κατά τη διεξαγωγή του πειράματος. Για παράδειγμα πάντα θα υπάρχουν μετακινήσεις αέρα, σκόνη που δημιουργεί πρόσθετες τριβές, η στιγμή που θέτουμε σε λειτουργία το χρονόμετρο, η στιγμή που το σταματούμε και πολλοί άλλοι παράγοντες, τους οποίους μάλιστα δεν είναι τόσο εύκολο να τους βρούμε.

Μπορεί όμως να έχουμε και άλλα προβλήματα, πολλά από τα οποία δύσκολα τα ανακαλύπτουμε. Για παράδειγμα το χρονόμετρο που χρησιμοποιούμε ίσως να μη λειτουργεί κανονικά και να τρέχει ή να πηγαίνει πιο αργά. Ίσως πάλι κατά τη διάρκεια του πειράματος να έχουμε διαρκή αύξηση της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος, η οποία αν και ανεπαίσθητη επίσης επιδρά στα αποτελέσματα που βρίσκουμε. Σε κάποια άλλη περίπτωση, όταν π.χ. θέλουμε να προσδιορίσουμε τη μάζα ενός ογκώδους, αλλά ελαφρού σώματος ζυγίζοντάς το, ίσως να ξεχνούμε να συνυπολογίσουμε την άνωση του ατμοσφαιρικού αέρα.

Τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε και τα οποία οφείλονται σ' όσα είπαμε στις δυο προηγούμενες παραγράφους μας δείχνουν τα σφάλματα. Η πρώτη παράγραφος αναφέρεται στα **τυχαία** και η δεύτερη στα **συστηματικά** σφάλματα. Είναι εύκολο να καταλάβει κανείς από τα παραπάνω, ότι τα τυχαία σφάλματα υπάρχουν πάντα, ενώ τα συστηματικά όχι. Πάντως αν έχουμε τα δεύτερα αυτά συνυπάρχουν με τα τυχαία.

Σύμφωνα μ' όσα είπαμε γίνεται κατανοητό ότι το συστηματικό σφάλμα μένει σχεδόν πάντα σταθερό σ' όλη τη διάρκεια του πειράματος. Το τυχαίο σφάλμα μεταβάλλεται και μπορεί να είναι και θετικό και αρνητικό Τα τυχαία σφάλματα πάντα υπάρχουν στο πείραμα. Αν δεν έχουμε συστηματικά σφάλματα οι μετρήσεις μας βρίσκονται γύρω από την πραγματική τιμή (Σχ. 1α). Ενώ αν υπάρχουν συστηματικά οι μετρήσεις μας είναι όλες μετατοπισμένες (και διασκορπισμένες) προς μια κατεύθυνση, θετική ή αρνητική σε σχέση με την "πραγματική τιμή"• (Σχ. 1β).




Σχήμα 1.

Ενώ όπως είδαμε παραπάνω τα τυχαία σφάλματα είναι αναπόφευκτα, οφείλονται κύρια σε αντικειμενικές αιτίες και σε τελευταία ανάλυση δεν επιδρούν στα αποτελέσματα των μετρήσεων μας παρά μόνο στην ακρίβειά τους, τα συστηματικά σφάλματα οφείλονται κύρια σε κακή λειτουργία και ρύθμιση των οργάνων μας ή της μεθόδου που χρησιμοποιούμε, κάνουν τα αποτελέσματά μας λαθεμένα, μπορούν και πρέπει να αποφεύγονται στο βαθμό που τα ανακαλύπτουμε.

• Αυτό βέβαια δεν συμβαίνει πάντα. Τα συστηματικά σφάλματα σε κάποιες περιπτώσεις μπορούν να οδηγούν π.χ. σε διαρκή μετατόπιση της «πραγματικής τιμής».

Τα τυχαία σφάλματα φαίνονται αν μετρήσουμε πολλές φορές π.χ. την ίδια ποσότητα, αλλά και από τα όργανα που χρησιμοποιούμε και μπορούν να υπολογισθούν με την βοήθεια **στατιστικών μεθόδων,** που έχουν τη βάση τους στη θεωρία των πιθανοτήτων. Αυτό δεν μπορεί να γίνει για τα συστηματικά. Με τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των τυχαίων σφαλμάτων ασχολείται το φυλλάδιο που κρατάτε στα χέρια σας.

### Λίγα λόγια ακόμη για τα συστηματικά σφάλματα

Εφόσον δεν υπάρχει άλλος τρόπος, πρέπει πάντα να προσπαθούμε να τα ανακαλύπτουμε και να απαλλασσόμαστε από αυτά.

Για την εξάλειψή τους χρειάζεται:

α) Η σωστή μελέτη των πειραματικών συνθηκών και των απαιτήσεων της θεωρίας.

β) Η βεβαιότητα ότι τα όργανά μας λειτουργούν σωστά. Αυτή μπορούμε να την αποκτήσουμε αν συγκρίνουμε τα όργανα του πειράματος με ακριβέστερα "πρότυπα" όργανα (πράγμα που στην πράξη είναι φυσικά πολύ δύσκολο, ιδιαίτερα στις συνθήκες του εκπαιδευτικού εργαστηρίου) και

γ) η προσεκτική εκτέλεση του πειράματος.

Υπάρχουν φυσικά κι άλλοι πρακτικοί τρόποι για την ανακάλυψη και εξάλειψή τους αλλά δεν είναι ούτε αυστηροί ούτε γενικοί. Γενικά απαιτείται ιδιαίτερη εμπειρία και γνώση των νόμων της φυσικής.

Πάντως πρέπει να πούμε ότι τα συστηματικά σφάλματα είναι τα πιο "επικίνδυνα" στον προσδιορισμό ενός μεγέθους κατά τη διάρκεια ενός πειράματος.

**Παρατήρηση**. Ένα πολύ συνηθισμένο συστηματικό σφάλμα είναι το αποκαλούμενο σφάλμα του μηδενός, δηλαδή το γεγονός, ότι το όργανο που χρησιμοποιούμε δεν δείχνει μηδέν όταν θα έπρεπε. Για παράδειγμα αυτό μπορούμε να το δούμε σ' ένα βολτόμετρο που ενώ στα άκρα του δεν εφαρμόζουμε τάση δείχνει π.χ. 0.2 V, ή σε ένα μικρόμετρο, το οποίο ενώ θα έπρεπε, όντας κλειστό, να δείχνει μηδέν, δείχνει – 0.04 mm. Σ' αυτή την περίπτωση αν, κάνοντας τη μέτρηση, διαβάσουμε απλώς την ένδειξη του οργάνου, θα έχουμε κάνει συστηματικό σφάλμα. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με δυο τρόπους:

α) Διορθώνουμε, αν είναι δυνατόν, το πρόβλημα, ώστε το όργανο να δείχνει μηδέν όταν πρέπει.

β) Διορθώνουμε το αποτέλεσμα αφού κάνουμε τη μέτρηση. Έτσι για παράδειγμα, αν το βολτόμετρό μας δείξει 7.8 V λέμε ότι το αποτέλεσμα είναι 7.8 V–0.2 V=7.6 V, ενώ αν το στο τύμπανο του μικρομέτρου διαβάσουμε μετά τη μέτρηση 2.49 mm λέμε ότι το αποτέλεσμά μας είναι 2.49 mm+0.04 mm=2.53 mm.

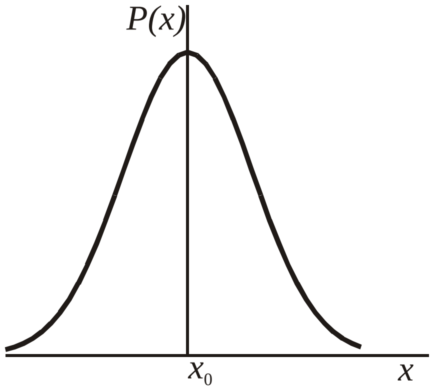
## Οι βασικές αρχές της θεωρίας των τυχαίων σφαλμάτων

Θα δώσουμε εδώ τα βασικά σημεία της θεωρίας των τυχαίων σφαλμάτων, που αποτελεί μέρος της θεωρίας των πιθανοτήτων, χωρίς όμως να παρουσιάσουμε αποδείξεις και διάφορες άλλες λεπτομέρειες που αναλύονται στο αντίστοιχο μάθημα. Οι βασικοί τύποι που είναι απαραίτητοι για την επεξεργασία των μετρήσεων στο εργαστήριο περιλαμβάνονται στα επόμενα κεφάλαια.

Έστω λοιπόν ότι μετρούμε κάποιο μέγεθος η πραγματική τιμή του οποίου είναι $x_0$. Όπως εξηγήσαμε και πιο πάνω η μέτρηση δεν θα μας δώσει την τιμή $x_0$, αλλά κάποια άλλη, έστω $x$. Διάφορες μετρήσεις θα μας δίνουν διαφορετικά $x$, χωρίς βέβαια να αποκλείεται να πάρουμε και το $x_0$, μόνο που ... δεν θα ξέρουμε ποιο είναι.

Μετρούμε λοιπόν το μέγεθος αυτό *N* φορές και σχεδιάζουμε την καμπύλη $P(x)=n(x)/N$, όπου $n(x)$ ο αριθμός των μετρήσεων που είχαν σαν αποτέλεσμα $x$.

Αποδεικνύεται πως όταν $N\to\infty$ η καμπύλη αυτή έχει τη μορφή του Σχ.2, δηλαδή είναι απόλυτα συμμετρική ως προς την πραγματική τιμή $x_0$ και τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν για $x\to\infty$.




Σχ.2.

Η συνάρτηση $P(x)$ είναι **πυκνότητα πιθανότητας**, αυτό σημαίνει πως το ολοκλήρωμα:

$$P(a,b)=\int_a^b P(x)dx \qquad (2.1)$$

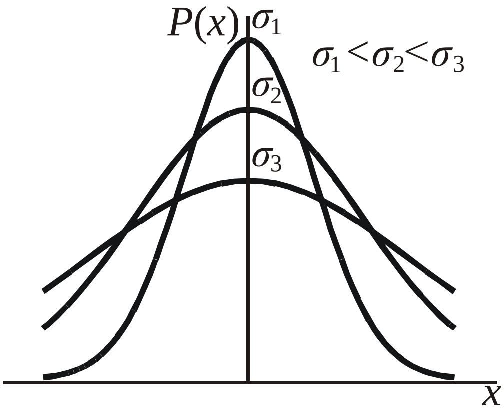
δίνει την πιθανότητα το αποτέλεσμα μιας μέτρησης να βρίσκεται στην περιοχή $a\le x\le b$.

Από τον ορισμό αυτό γίνεται προφανές πως θα ισχύει η σχέση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1\,, \qquad (2.2)$$

η οποία ονομάζεται και *συνθήκη κανονικοποίησης* και υποδηλώνει πως το αποτέλεσμα της μέτρησης οπωσδήποτε βρίσκεται μέσα στην περιοχή $-\infty<x<\infty$. Μ' άλλα λόγια η σχέση (2.2) υποδηλώνει επίσης πως το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται ανάμεσα στην καμπύλη $P(x)$ και τον άξονα των $x$ είναι **πάντα** ίσο με τη μονάδα.

Αποδεικνύεται επίσης πως η συνάρτηση, η μορφή της οποίας παριστάνεται στο Σχ. 2 είναι μια πολύ γνωστή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η αλλιώς *κατανομή*, που ονομάζεται **κανονική κατανομή** ή **κατανομή Gauss** και δίνεται από τη σχέση:




Σχ.3

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} \qquad (2.3)$$

Στον τύπο (2.3) εμφανίζεται ένα μέγεθος, το $\sigma$, το οποίο ονομάζεται **τυπική απόκλιση** και είναι πολύ σημαντικό για το χαρακτηρισμό της κατανομής και της καμπύλης $P(x)$. Έτσι το $\sigma$ καθορίζει τόσο το πλάτος, όσο και το ύψος της καμπύλης.

Αύξηση του $\sigma$ σημαίνει αύξηση του πλάτους και, κατά συνέπεια (γιατί;) μείωση του ύψους (βλ. σχ. 3). Μ' άλλα λόγια το $\sigma$ μας δείχνει πόση είναι η διασπορά των τιμών γύρω από την πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους.

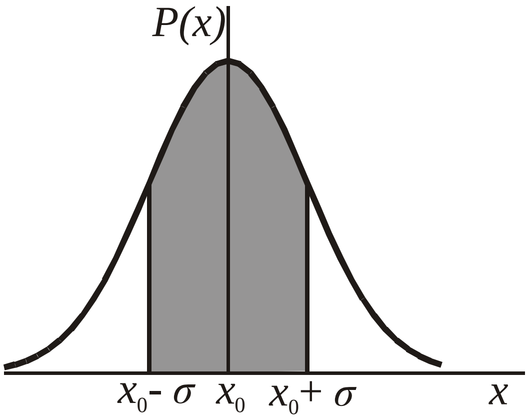
Ένα άλλο χαρακτηριστικό γνώρισμα της τυπικής απόκλισης είναι ότι το ολοκλήρωμα

$$P(-\sigma,\sigma)=\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} P(x)dx \quad (2.4)$$

δηλαδή το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής στο Σχ.4 είναι ίσο περίπου με 0.68.

Βέβαια για το εργαστήριο πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη μας πως δεν έχουμε, ούτε είναι δυνατόν να έχουμε, άπειρες μετρήσεις.

Άρα δεν μπορούμε να βρούμε την πραγματική τιμή απλά από καμπύλες, όπως αυτές που δείξαμε πιο πάνω.



Σχ.4

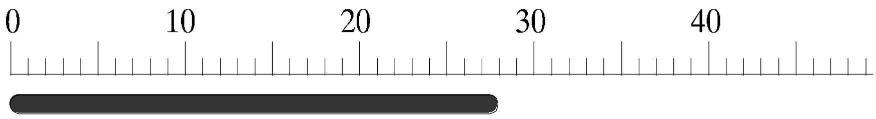
Σ' αυτό ακριβώς συνίσταται και η ουσία της θεωρίας των σφαλμάτων, η οποία μας δίνει σε τελική ανάλυση μια περιοχή, στην οποία με μεγάλη (συγκεκριμένη) πιθανότητα βρίσκεται η ζητούμενη τιμή.

## Εκτίμηση του σφάλματος κατά την ανάγνωση κλίμακας

Μια κατηγορία τυχαίων σφαλμάτων είναι τα λεγόμενα σφάλματα ανάγνωσης, που εκφράζουν το αναπόφευκτο σφάλμα που κάνουμε όταν διαβάζουμε κάποια ένδειξη του οργάνου μέτρησης που χρησιμοποιούμε*.

Συνήθως η μέτρησή μας στο εργαστήριο ανάγεται στην ανάγνωση κάποιων ενδείξεων από τα όργανα τα οποία χρησιμοποιούμε π.χ μέτρηση μήκους με υποδεκάμετρο, μέτρηση τάσης με βολτόμετρο κλίμακας κλπ. Αυτή η διαδικασία που είναι πολύ γνωστή εμπεριέχει τα σφάλματα.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι πρέπει να μετρήσουμε το μήκος ράβδου (Σχ.5).



Σχ.5

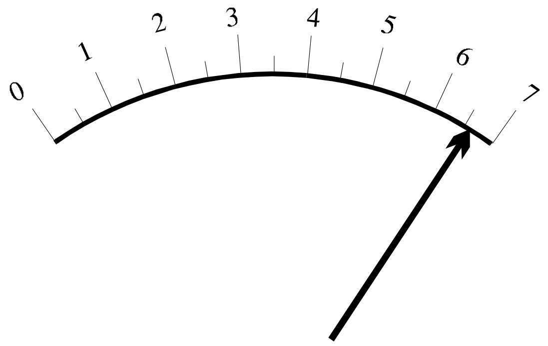
Αναμφισβήτητα το άκρο της ράβδου βρίσκεται πιο κοντά στα 28 cm. Έτσι λοιπόν μπορούμε να πούμε:

$$l = 28\,\text{cm} \qquad (3.1)$$

Αλλά προφανώς πιο σωστά :

$$27.5\,\text{cm} \le l \le 28.5\,\text{cm} \qquad (3.1\alpha)$$

* Αυτά τα σφάλματα αναφέρονται κύρια στα αναλογικά όργανα. Υπάρχουν όμως (όπως θα δούμε παρακάτω) και αντίστοιχα σφάλματα για τα ψηφιακά όργανα.



Σχ.6

Αντίστοιχα για την ένδειξη του βολτομέτρου (Σχ.6) μπορούμε να πούμε:

$$U = 6.7\ \text{V} \qquad (3.2)$$

ή ορθότερα:

$$6.6\ \text{V} \le U \le 6.8\ \text{V} \qquad (3.2\alpha)$$

Έτσι λοιπόν βλέπουμε ότι κάθε μέτρησή μας έχει μια σχετική ακρίβεια. Αυτή την ακρίβεια μπορούμε καλύτερα να την εκφράσουμε χρησιμοποιώντας την έννοια του **σφάλματος ανάγνωσης**.

Επομένως αντί να χρησιμοποιήσουμε τη γραφή (3.1) ή (3.1α) μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα

$$l = 28.0 \pm 0.5\ \text{cm} \qquad (3.3)$$

και αντίστοιχα για τις (3.2) και (3.2α):

$$U = 6.7 \pm 0.1\ \text{V} \qquad (3.4)$$

Ο προσδιορισμός του σφάλματος ανάγνωσης ( ή μάλλον η εκτίμησή του) δεν είναι εύκολη υπόθεση και απαιτείται γι' αυτό αρκετή πείρα. Φυσικά εδώ παίζει πολλές φορές ρόλο και ο προσωπικός παράγοντας. Αυστηροί κανόνες γι' αυτό δεν υπάρχουν. Θα μπορούσαμε ενδεικτικά ν' αναφέρουμε τους εξής: α) Αν οι γειτονικές υποδιαιρέσεις απέχουν 1÷2 mm το σφάλμα το θεωρούμε μία ή μισή υποδιαίρεση. β) Αν οι γειτονικές υποδιαιρέσεις απέχουν 2÷5 mm το σφάλμα το εκτιμούμε περίπου από μισή υποδιαίρεση ως ένα δέκατο της υποδιαίρεσης κλπ.

☑ **Σημείωση 1**. Το σφάλμα ανάγνωσης, δεν έχει να κάνει με το **σφάλμα παράλλαξης**, δηλαδή το σφάλμα που οφείλεται στο ότι δεν κοιτάμε σωστά τη βελόνα του αναλογικού μας οργάνου. Αυτό είναι βασικά σφάλμα ανεξάρτητο από τις συνθήκες και τα όργανα του πειράματος και το οποίο προσπαθούμε με κάθε τρόπο να το αποφύγουμε. Είναι χαρακτηριστικό ότι πολλά αναλογικά όργανα έχουν πίσω από τη βελόνα έναν μικρό καθρέφτη που μας βοηθάει να εκμηδενίσουμε ή να μειώσουμε στο ελάχιστο το σφάλμα παράλλαξης βλέποντας τη βελόνα να ταυτίζεται με το είδωλό της, κάνοντας έτσι την ανάγνωση της ένδειξης αντικειμενική.

☑ **Σημείωση 2**. Το κάθε όργανο έχει πάντα μια ακρίβεια που οφείλεται στον κατασκευαστή και που κατά κανόνα αναγράφεται πάνω του. Συνήθως το σφάλμα που οφείλεται στην ακρίβεια του οργάνου είναι πιο μικρό από το σφάλμα ανάγνωσης κι έτσι δεν το λαμβάνουμε υπόψη μας (αυτός εξάλλου είναι και ο στόχος του κατασκευαστή). **Αν όμως τύχει το σφάλμα αυτό να είναι της τάξης ή μεγαλύτερο του σφάλματος ανάγνωσης πρέπει να αγνοήσουμε το δεύτερο.**

☑ **Σημείωση 3.** Σήμερα αρκετά πλατιά χρησιμοποιούνται ψηφιακά όργανα. Εδώ διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

α) Η ένδειξη κατά τη μέτρηση δεν είναι σταθερή, αλλά το τελευταίο ψηφίο «παίζει» γύρω από μια τιμή. Τότε σαν μέτρηση λαμβάνουμε αυτή τη «μέση» τιμή, ενώ σαν σφάλμα το εύρος της μεταβολής

β) Η ένδειξη είναι σταθερή. Τότε (αν δεν υπάρχει άλλος περιορισμός από τον κατασκευαστή ή τον τρόπο χρήσης του οργάνου) το σφάλμα είναι 0.5 του τελευταίου ψηφίου (εξαρτάται από την κλίμακα των μετρήσεων). Το ίδιο φυσικά ισχύει και για τα κομπιουτεράκια. Μόνο που πρέπει να παρατηρήσουμε ότι πάντα χρειάζεται (ιδιαίτερα για τα κομπιουτεράκια) να σκεφτόμαστε ποιο θα πρέπει να είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μας που πρέπει να κρατήσουμε σύμφωνα και μ' όσα θα αναφέρουμε πιο κάτω.

Όσον αφορά την ακρίβεια του ψηφιακού οργάνου, αυτή σε τίποτα δεν διαφέρει από την ακρίβεια των μη ψηφιακών οργάνων που οφείλεται στον κατασκευαστή. Εδώ το μόνο που αλλάζει είναι το σφάλμα ανάγνωσης που είναι πια σαφές και το ίδιο για όλους.

# Πολλαπλές μετρήσεις

Σε πολλές μετρήσεις είναι αδύνατον να εκτιμήσουμε το σφάλμα μόνο με βάση την ένδειξη του οργάνου. Για παράδειγμα όταν με τη βοήθεια χρονομέτρου μετράμε το χρόνο ανάμεσα σε δύο γεγονότα το σφάλμα μας οφείλεται (αν εξαιρέσουμε διάφορους άλλους παράγοντες) κύρια στην αντίδραση του χειριστή του χρονομέτρου, διότι είναι σχεδόν αδύνατο να θεωρήσουμε ότι πάντα βάζει σε λειτουργία το χρονόμετρο "ταυτόχρονα" με το πρώτο γεγονός και το σταματάει "ταυτόχρονα" με το δεύτερο.

Σ' αυτή την περίπτωση επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση μερικές φορές και έτσι μπορούμε να βρούμε καλύτερα και την τιμή που είναι κοντά στην πραγματική, αλλά και το σφάλμα.

# Μέση τιμή

Έστω λοιπόν ότι μετράμε την ίδια ποσότητα N φορές και βρίσκουμε τις τιμές $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_N$. Τότε σύμφωνα με τη θεωρία των πιθανοτήτων θεωρούμε ότι η τιμή που βρίσκεται πιο κοντά στην "πραγματική" είναι η μέση τιμή που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (4.1)$$

Και σ' αυτή την περίπτωση όμως δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το αποτέλεσμά μας συμπίπτει με την "πραγματική" τιμή. Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε το σφάλμα, δηλαδή μια περιοχή τιμών του $x$ μέσα στην οποία βρίσκεται αυτή η πραγματική τιμή. Δηλαδή

$$x = \bar{x} \pm \delta x \qquad (4.2)$$

Από τη μαθηματική θεωρία σφαλμάτων προκύπτει ότι αν θέλουμε η πραγματική τιμή να βρίσκεται στο διάστημα (4.2) με πιθανότητα 68%*, τότε

$$\delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \qquad (4.3)$$

Το σφάλμα (4.3) λέγεται απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής.

**Παράδειγμα**: Ας υποθέσουμε ότι κατά τη μέτρηση κάποιου μήκους $\lambda$ λάβαμε τις εξής τιμές (σε mm)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 24.25 | 24.26 | 24.22 | 24.28 | 24.24 | 24.25 | 24.22 | 24.26 | 24.23 | 24.24 |

Έτσι, σχεδιάζουμε τον πίνακα.

| $\lambda_i$ mm | $\lambda_i - \bar{\lambda}$ mm | $(\lambda_i - \bar{\lambda})^2$ $mm^2 \times 10^5$ |
|---|---|---|
| 24.25 | -0.005 | 2.5 |
| 24.26 | 0.015 | 22.5 |
| 24.22 | -0.025 | 62.5 |
| 24.28 | 0.035 | 122.5 |

* Ο αριθμός αυτός συμπίπτει με το 0.68 της σελ. 10 και αυτό βέβαια δεν είναι τυχαίο.

| | | |
|---|---|---|
| 24.24 | -0.005 | 2.5 |
| 24.25 | 0.005 | 2.5 |
| 24.22 | -0.025 | 62.5 |
| 24.26 | 0.015 | 22.5 |
| 24.23 | -0.015 | 22.5 |
| 24.24 | -0.005 | 2.5 |
| $\sum_{i=1}^{10}\lambda_i = 242.45\ mm$ | $\sum_{i=1}^{10}(\lambda_i - \bar{\lambda}) = 0$ | $\sum_{i=1}^{10}(\lambda_i - \bar{\lambda})^2 = 3.25 \cdot 10^{-3}\ mm^2$ |

Με τη βοήθεια του πίνακα και των τύπων (4.1) και (4.3) βρίσκουμε

$$\bar{\mathrm{l}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{l}_i = \frac{242.45\ \mathrm{mm}}{10} = 24.245\ \mathrm{mm}$$

$$\delta\mathrm{l} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(\mathrm{l}_i - \bar{\mathrm{l}})^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{3.25 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{mm}^2}{10 \cdot 9}} = 0.00600925\ \mathrm{mm}$$

Άρα τελικά (όπως θα δούμε και στην επόμενη παράγραφο):

$$\mathrm{l} = (24.245 \pm 0.006)\ \mathrm{mm} \qquad (4.4)$$

Αυτό το αποτέλεσμα σημαίνει ότι με πιθανότητα 68% η πραγματική μας τιμή βρίσκεται στο διάστημα από 24.239 mm έως 24.251 mm. Με βάση τα όσα είπαμε στην σελίδα 10 γίνεται κατανοητό πως το διάστημα αυτό αντιστοιχεί στην περιοχή από $x_0 - \sigma$ έως $x_0 + \sigma$.

☑ **Σημείωση.** Προσοχή! Μέση τιμή μπορούμε να βρούμε μόνο αν μετράμε το ίδιο μέγεθος και σε κάθε μέτρηση περιμένουμε να βρούμε την ίδια τιμή. Αν για παράδειγμα μετράμε πολλές φορές το χρόνο πτώσης ενός σώματος από το ίδιο ύψος και βρίσκουμε τους χρόνους $t_1, t_2, \ldots, t_N$ τότε βρίσκουμε το $\bar{t}$ και το $\delta\bar{t}$. Αν όμως μετράμε τους χρόνους πτώσης $t_1, t_2, \ldots, t_N$ από διαφορετικά ύψη $h_1, h_2, \ldots, h_N$ τότε ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ να υπολογίσουμε τα $\bar{t}$, $\delta\bar{t}$, $\bar{h}$, $\delta\bar{h}$ διότι δεν έχουν κανένα νόημα.

# Περί του αριθμού των σημαντικών ψηφίων

Πολλές φορές στη διάρκεια των πράξεων μας βρίσκουμε αριθμούς με μεγάλο αριθμό ψηφίων. Π.χ. έστω ότι βρίσκουμε για τη μέση τιμή μιας ποσότητας το αποτέλεσμα:

$$\bar{x} = 7.3333....$$

Αμέσως γεννιέται το ερώτημα: πόσα δεκαδικά ψηφία πρέπει να αφήσουμε;

Αυτή τη στιγμή δεν μπορούμε να δώσουμε μια συγκεκριμένη απάντηση. Για να το κάνουμε πρέπει να ξέρουμε την ακρίβεια του πειράματός μας, δηλαδή το σφάλμα.

Έστω όμως ότι υπολογίζοντας το απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής. Βγάζοντας την τετραγωνική ρίζα βρίσκουμε:

$$\delta x = 0.06273273.....$$

Πως τώρα μπορούμε να απαντήσουμε στο προηγούμενο ερώτημα;

Στο Εργαστήριο Φυσικής*, λαμβάνοντας υπόψη την ακρίβεια των χρησιμοποιούμενων μεθόδων και οργάνων εφαρμόζουμε τον εξής κανόνα:

Αν έχουμε βρει την πιθανότερη (μέση) τιμή και το σφάλμα, στρογγυλοποιούμε το σφάλμα μέχρι να μας μείνει ένα, το μεγαλύτερο, ψηφίο που είναι διάφορο του μηδενός. Ύστερα στην πιθανότερη (μέση) τιμή αφήνουμε τελευταίο το ψηφίο της ίδιας τάξης μεγέθους κάνοντας κι εδώ στρογγυλοποίηση.

Έτσι στο παράδειγμά μας λαμβάνουμε: $\delta x = 0.06$ και $\bar{x} = 7.33$

Άρα τελικά: $x = 7.33 \pm 0.06$

Έτσι εξηγείται και το αποτέλεσμα (4.4).

Υπάρχει μια μικρή εξαίρεση από τον κανόνα αυτής της παραγράφου: αν το πρώτο σημαντικό ψηφίο του σφάλματος είναι μικρό (1 ή 2) πιο σωστό είναι να διατηρήσουμε ακόμη ένα ψηφίο στο τελικό αποτέλεσμα (τόσο στο σφάλμα όσο και στην πιθανότερη τιμή).

Εδώ κάποιος μπορεί να διαπιστώσει την ύπαρξη κάποιου προβλήματος. Για να βρούμε το σφάλμα από τη σχέση (4.3) πρέπει να ξέρουμε τη μέση τιμή από τη σχέση (4.1). Πόσα σημαντικά ψηφία θα πρέπει να κρατήσουμε στη μέση τιμή όταν χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.3);

Μια απάντηση θα μπορούσε να είναι όσο περισσότερα τόσο το καλύτερο. Και πραγματικά, αν χρησιμοποιούμε κομπιουτεράκι ή ηλεκτρονικό υπολογιστή μπορούμε να το κάνουμε. Μπορούμε βέβαια να κρατήσουμε και λιγότερα. Πάντως έχει σημασία να μπορούμε από τα πριν να προβλέπουμε, ώστε στις πράξεις που κάνουμε για τον υπολογισμό του σφάλματος με τη χρήση της μέσης τιμής η τελευταία να έχει **τουλάχιστον ένα σημαντικό ψηφίο περισσότερο** από όσα θα μείνουν στο τέλος.

Όταν βέβαια βρούμε και το σφάλμα και καταλήξουμε οριστικά στον αριθμό των σημαντικών ψηφίων της μέσης τιμής στις κατοπινές πράξεις που ίσως χρειαστούν **χρησιμοποιούμε μόνο αυτό το αποτέλεσμα**.

* Συνήθως, στις επιστημονικές εργασίες αφήνουν δύο σημαντικά ψηφία για το σφάλμα και τα αντίστοιχα ψηφία της πιθανότερης τιμής. Αυτό όμως δεν θα το κάνουμε στα πλαίσια του εργαστηρίου Γενικής Φυσικής.

# Κανόνες στρογγυλοποίησης

Πριν προχωρήσουμε σε συγκεκριμένα παραδείγματα ας πούμε δυο λόγια για τους κανόνες στρογγυλοποίησης.

Έστω ότι επιλέξαμε το ψηφίο στο οποίο θέλουμε να κάνουμε τη στρογγυλοποίηση (το υπογραμμισμένο στους αριθμούς του πίνακα):

| Α/Α | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Αριθμός | 12.1**3**86 | 2**5**67 | 23.**6**47 | 0.0**3**46 | **2**.50001 | 6**4**54 | 0.**4**5 |

Τότε ακολουθούμε τους εξής κανόνες:

α) Αν το αμέσως επόμενο ψηφίο είναι μεγαλύτερο του 5 ανεβάζουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο κατά μια μονάδα και μηδενίζουμε τα υπόλοιπα. Με βάση τον κανόνα αυτό τα νούμερα 1 και 2 γράφονται 12.14 και 2600 αντίστοιχα.

β) Αν το αμέσως επόμενο ψηφίο είναι μικρότερο του 5 αφήνουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο όπως είναι και μηδενίζουμε τα υπόλοιπα. Με βάση τον κανόνα αυτό τα νούμερα 3 και 4 γράφονται 23.6 και 0.03 αντίστοιχα.

γ) Αν το αμέσως επόμενο ψηφίο είναι ίσο με το 5 εξετάζουμε αν μετά από αυτό υπάρχει κάποιο άλλο ψηφίο διάφορο του μηδενός σε οποιαδήποτε θέση.

Αν υπάρχει τότε αυξάνουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο κατά μία μονάδα και μηδενίζουμε τα υπόλοιπα. Με βάση τον κανόνα αυτό τα νούμερα 5 και 6 γράφονται 3 και 6500 αντίστοιχα.

Αν δεν υπάρχει τότε μπορούμε να κάνουμε ότι θέλουμε, είτε να αυξήσουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο κατά μία μονάδα μηδενίζοντας τα υπόλοιπα, είτε να το αφήσουμε όπως είναι μηδενίζοντας τα υπόλοιπα. Έτσι το νούμερο 7 μπορεί να γραφτεί είτε 0.5 είτε 0.4. Πάντως αν σε μια σειρά μετρήσεων έχουμε αυτή την περίπτωση μερικές φορές, συνίσταται στις μισές να αυξάνουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο κατά μία μονάδα, ενώ στις υπόλοιπες να το αφήνουμε ως έχει.

**Παραδείγματα**

| | Πριν από την επιλογή των σημαντικών ψηφίων | | Μετά την επιλογή των σημαντικών ψηφίων | | Τελικό Αποτέλεσμα |
|---|---|---|---|---|---|
| Α/Α | $\bar{x}$ | $\delta x$ | $\delta x$ | $\bar{x}$ | $x$ |
| 1 | 263.2765 | 0.07813 | 0.08 | 263.28 | 263.28±0.08 |
| 2 | 12.2 | 0.03116 | 0.03 | 12.20 | 12.20±0.03 |
| 3 | 127.187 | 0.932 | 0.9 | 127.2 | 127.2±0.9 |
| 4 | 17.2362 | 0.232 | 0.23 | 17.24 | 17.24±0.23 |
| 5 | 1563 | 33.62 | 30 | 1560 | 1560±30 |
| 6 | 178936 | 589 | 600 | 178900 | 178900±600 |
| 7 | 11002380 | 9873 | 10000 | 11002000 | 11002000±10000 |
| 8 | 78654 | 2486 | 2500 | 78700 | 78700±2500 |
| 9 | 135067 | 1897 | 1900 | 135100 | 135100±1900 |

# Σχετικό σφάλμα

Πολλές φορές ο φοιτητής αναρωτιέται αν το σφάλμα που έχει βρει είναι μεγάλο ή μικρό και μάλιστα ακούγεται για παράδειγμα ότι σφάλμα 2000 είναι πολύ μεγάλο. Μια τέτοια αντιμετώπιση προφανώς δεν είναι σωστή. Για να κρίνουμε αν ένα σφάλμα είναι μικρό ή μεγάλο πρέπει να εξετάσουμε δύο παράγοντες

1. Αν το σφάλμα ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις των πειραματικών στόχων. Δηλαδή αν έχουμε την ακρίβεια που απαιτείται στο συγκεκριμένο πείραμα.

2. Ένα καλό κριτήριο για το αν ένα σφάλμα είναι μικρό ή μεγάλο μας δίνει το σχετικό σφάλμα που ορίζεται ως εξής:

$$\eta = \frac{\delta x}{\bar{x}} \qquad (6.1)$$

Το σχετικό σφάλμα είναι καθαρός αριθμός και δίνεται σε ποσοστά. Έτσι λοιπόν ένα σφάλμα θεωρείται μικρό αν *η*~5%, ενώ μεγάλο αν *η*>10%.

Φυσικά όλα αυτά με την προϋπόθεση ότι ισχύει το 1.

Συνήθως ο πειραματικός φυσικός, αν το σχετικό του σφάλμα είναι μεγάλο, προσπαθεί με τη βελτίωση τόσο των πειραματικών συσκευών, όσο και της μεθοδολογίας στη διεξαγωγή του πειράματος, να το μειώσει.

Σκεφθείτε, υπάρχει περίπτωση το σχετικό σφάλμα να είναι της τάξης του 500% χωρίς αυτό να προκαλεί ανησυχία στον ερευνητή

Πάντως διευκρινίζουμε εδώ, πως στο εκπαιδευτικό εργαστήριο φυσικής το πρόβλημα δεν είναι να έχουμε μικρά σφάλματα, αλλά **να μπορούμε να εξηγήσουμε τις αιτίες των σφαλμάτων μας**.

**Παραδείγματα** Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία των παραδειγμάτων της προηγούμενης παραγράφου λαμβάνουμε:

| Α/Α | $\bar{x}$ | $\delta x$ | **η** |
|---|---|---|---|
| 1 | 263.28 | 0.08 | 0.03% |
| 2 | 12.20 | 0.03 | 0.2% |
| 3 | 127.2 | 0.9 | 0.7% |
| 4 | 17.24 | 0.23 | 1.3% |
| 5 | 1560 | 30 | 1.9% |
| 6 | 178900 | 600 | 0.3% |
| 7 | 11002000 | 10000 | 0.09% |
| 8 | 78700 | 2500 | 3.2% |
| 9 | 135100 | 1900 | 1.4% |

Τονίζουμε εδώ πως στο σχετικό σφάλμα δεν υπάρχουν κάποιοι κανόνες στρογγυλοποίησης. Απλά το γράφουμε έτσι ώστε να «διαβάζεται».

# Διάδοση σφαλμάτων

Τις περισσότερες φορές στις ασκήσεις του εργαστηρίου, αλλά και στα ερευνητικά πειράματα, η άμεση μέτρηση κάποιων μεγεθών μας χρησιμεύει για τον έμμεσο υπολογισμό κάποιων άλλων με τη χρήση γνωστών τύπων. Έτσι για παράδειγμα μετρώντας το ρεύμα *I* που διαρρέει κάποιον αγωγό και την τάση *U* στα άκρα του μπορούμε από τον τύπο του Ohm να υπολογίσουμε την αντίσταση *R=U/I*.

Έστω τώρα ότι έχουμε μετρήσει την τάση *U* με σφάλμα *δU* ( ανεξάρτητα αν είναι σφάλμα ανάγνωσης ή απόλυτο σφάλμα μέσης τιμής) και την ένταση του ρεύματος *I* με σφάλμα *δI*. Άμεση μέτρηση της αντίστασης δεν έχουμε, άρα δεν μπορούμε να μιλήσουμε για σφάλμα του *R* με την έννοια που μέχρι τώρα μιλούσαμε. Είναι όμως προφανές ότι τα σφάλματα των *U* και *I* θα έχουν επίδραση και στο *R*. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε διάδοση σφαλμάτων.

Ισχύει ο εξής κανόνας (που αποδεικνύεται αυστηρά με βάση τη μαθηματική θεωρία των σφαλμάτων):

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα *λ = f(x,y,z,...)* όπου τα μεγέθη *x,y,z,...* έχουν σφάλματα αντίστοιχα *δx, δy, δz,...* Τότε ισχύει:

$$\delta\lambda=\sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta x\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\delta y\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\delta z\right)^2+\ldots} \qquad (7.1)$$

όπου $\partial\lambda/\partial x$ η **μερική παράγωγος** της συνάρτησης *λ* ως προς *x*.

Έτσι λοιπόν για την περίπτωση που εξετάσαμε στην αρχή της παραγράφου θα ισχύει

$$\delta R=\sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\delta U\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial I}\delta I\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\delta U}{I}\right)^2+\left(\frac{U}{I^2}\delta I\right)^2}$$

**Παρατήρηση 1.** Όταν κάνουμε τις παραγωγίσεις και χρειαστεί να αντικαταστήσουμε τα νούμερα, στη θέση των x, y, z,... πρέπει να βάλουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα, είτε αυτά είναι μέσες τιμές, είτε προϊόν μιας μέτρησης.

**Παρατήρηση 2**. Αν η ποσότητα *λ* είναι **μόνο γινόμενο και πηλίκο** των μεγεθών *x,y,z,...* τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda}=\sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2+\left(\frac{\delta y}{y}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{z}\right)^2+\ldots} \qquad (7.2)$$

**Παράδειγμα 7.1** Μελετώντας ένα απλό εκκρεμές βρίσκουμε ότι το μήκος του $\mathrm{l}=(93.80\pm0.10)\ \mathrm{cm}$, ενώ η περίοδός του $T=(1.9440\pm0.0010)\ \mathrm{s}$. Να υπολογισθεί η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Από τον τύπο $g=4\pi^2\lambda/T^2$ βρίσκουμε

$$g=4\pi^2\cdot 93.80/(1.9440)^2\ \mathrm{cm/s^2}=979.87\ \mathrm{cm/s^2}.$$

Έχουμε $\partial g/\partial\lambda=4\pi^2/T^2$, $\partial g/\partial T=-8\pi^2\lambda/T^3$ και από την (7.1):

$$\delta g=4\pi^2\sqrt{\left(\frac{\delta\lambda}{T^2}\right)^2+\left(\frac{2\lambda\delta T}{T^3}\right)^2}\approx 1.451\ cm/s^2.$$ Άρα $\boxed{g=(979.9\pm1.5)\ \mathrm{cm/s^2}}$

**Παράδειγμα 7**. Φοιτητής έχει χρονόμετρο που το σφάλμα του είναι 0.1 *s* και θέλει να μετρήσει την περίοδο εκκρεμούς που είναι της τάξης των 2 s με σφάλμα μικρότερο του 0.1%.

Αν κάνει μια μέτρηση προφανώς το σφάλμα του θα είναι της τάξης του 5%. Αν τώρα θεωρήσει ότι το εκκρεμές του βρίσκεται σε τέτοιες ιδανικές συνθήκες που η περίοδός του για 100 ταλαντώσεις δεν μεταβάλλεται, μπορεί να μετρήσει το χρόνο των 100 ταλαντώσεων που έστω ότι είναι *t*= 213,55 s. Γι' αυτή τη μέτρηση όμως έχει σφάλμα *δt*=0.1 s. Άρα *T* = *t*/100=2.135 s. Τότε

$$\delta T=\sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\delta t\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\delta t}{100}\right)^2}=\frac{\delta t}{100}=0.001\ s.$$

Επομένως $T=2.135\pm0.001$ s και $\eta=\delta T/T\approx0.0004\%$.

**Παράδειγμα 7.3** Μετρώντας την ένταση του ρεύματος και την τάση στα άκρα αντίστασης λαμβάνουμε τις τιμές:

| *U* (V) | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *I* (mA) | 26 | 35 | 43 | 51 | 58 | 65 | 75 | 79 |

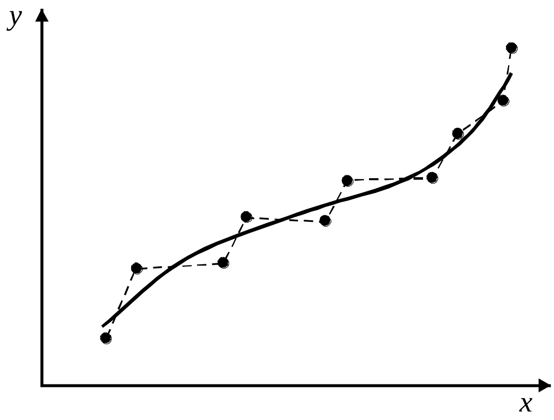
με *δU*=0.2 V και *δI*=1 mA. Από τον τύπο του Ohm υπολογίζουμε την αντίσταση *R* για διάφορες τιμές του *U*.

| *U* (V) | *I* (mA) | *R* (Ω) | *δR* (Ω) | $R\pm\delta R$ (Ω) |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 25 | 192.31 | 11 | 192±11 |
| 7 | 35 | 200 | 8 | 200±8 |
| 9 | 43 | 209.30 | 7 | 209±7 |
| 11 | 51 | 215.69 | 6 | 216±6 |
| 13 | 58 | 224.14 | 5 | 224±5 |
| 15 | 65 | 230.77 | 5 | 231±5 |
| 18 | 75 | 240 | 4 | 240±4 |
| 20 | 79 | 253.16 | 4 | 253±4 |

# Χάραξη καμπύλης

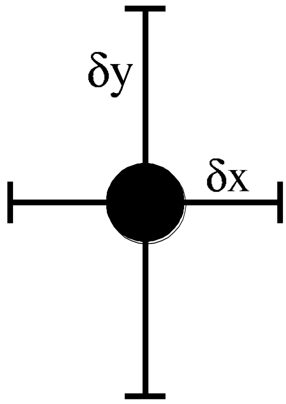
Συχνά τα αποτελέσματα των μετρήσεών μας τα δίνουμε με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων, είτε διότι αυτές μας βοηθούν για τον υπολογισμό κάποιων μεγεθών, είτε για να τα δείξουμε καλύτερα και να βγάλουμε συγκεκριμένα φυσικά συμπεράσματα.

Συνήθως όμως τα πειραματικά μας αποτελέσματα δεν πέφτουν "ομαλά" στο διάγραμμά μας. Θα ήταν λάθος να τα ενώσουμε τότε μεταξύ τους όπως με τις διακεκομμένες γραμμές του Σχ. 7, διότι αυτό θα σήμαινε ότι στα σημεία αυτά το μετρούμενο μέγεθος αλλάζει αλματωδώς κάποιες ιδιότητές του, πράγμα που δεν φαίνεται πιθανό. Έτσι το λογικό θα ήταν να φέρουμε μια ομαλή καμπύλη όπως στο Σχ. 7.



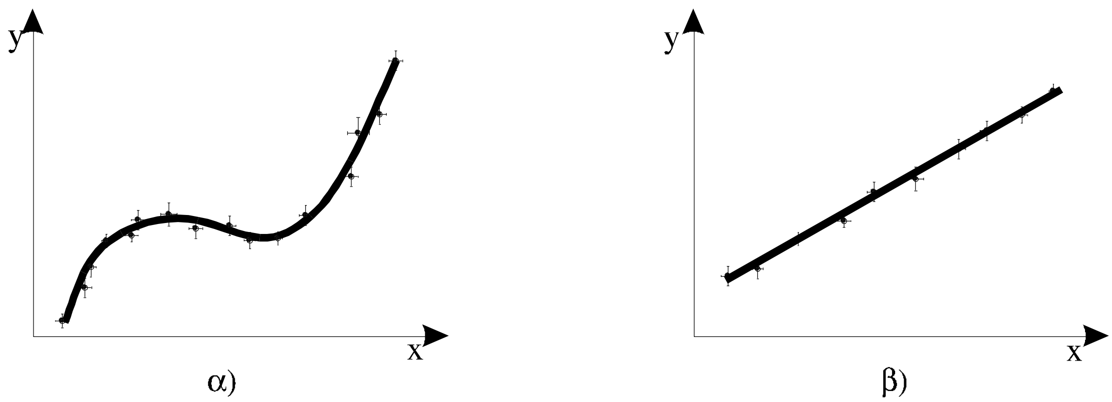

Σχ. 7.

Εξάλλου φέροντας τα σημεία στο Σχ.7 δεν αναφερθήκαμε καθόλου στα σφάλματα, που, όπως είπαμε, συνοδεύουν κάθε μέτρηση και κάθε πειραματικό αποτέλεσμα. Τα σφάλματα πρέπει πάντα να χαράσσονται στο διάγραμμα για κάθε σημείο, καθώς φαίνεται στο παράπλευρο Σχ. 8, όπου τα *δx* και *δy* είναι τα σφάλματα (ανάγνωσης, μέσης τιμής ή σύνθετα), ενώ το μέγεθος των γραμμών ανταποκρίνεται στο μέγεθος των σφαλμάτων σύμφωνα με τις χρησιμοποιούμενες για τα *x* και *y* κλίμακες.



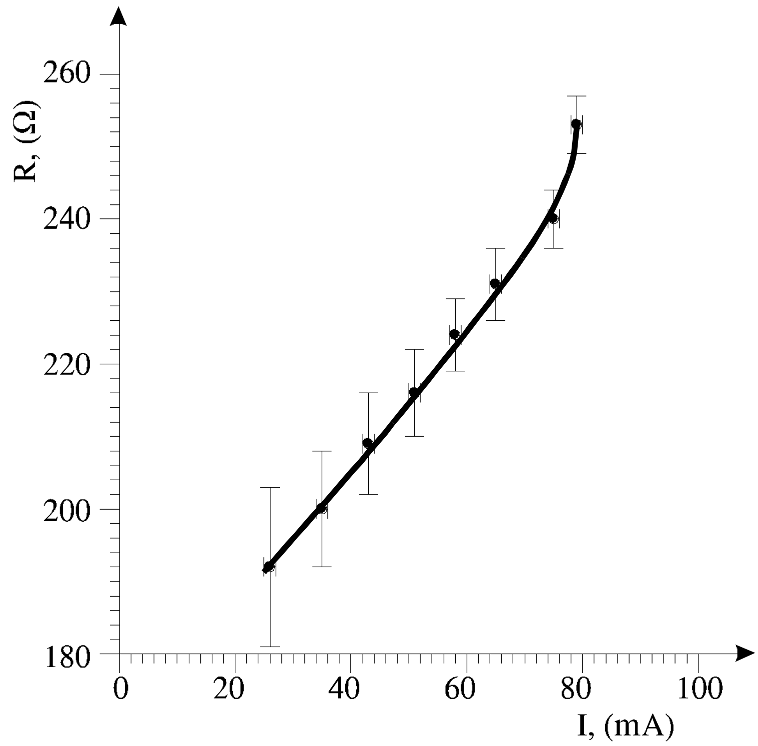

*Σχ.8*

Έτσι λοιπόν οι καμπύλες χαράσσονται όπως φαίνονται στα σχ. 9(α) και 9(β).




Σχ.9

**Παράδειγμα.** Με βάση το παράδειγμα 7.3 χαράσσουμε την καμπύλη του σχήματος 10.




Σχ.10

**Παρατήρηση.** Στις γραφικές παραστάσεις δεν έχουμε το δικαίωμα να προεκτείνουμε την πειραματική καμπύλη δεξιά ή αριστερά των ακραίων σημείων, ακόμη κι αν ξέρουμε από τη θεωρία πως αυτή περίπου πρέπει να πηγαίνει, διότι κανείς δεν μπορεί να μας διαβεβαιώσει πως στη συγκεκριμένη πειραματική συσκευή αυτό ισχύει. Μπορούμε όμως, αν (και όταν) απαιτείται από την άσκηση, να κάνουμε κάποιες προεκτάσεις, κατά κανόνα ευθύγραμμες.

# Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Υπάρχουν μερικές περιπτώσεις όμως, που για την χάραξη της καμπύλης δεν χρειάζεται να προσπαθήσουμε να το κάνουμε με το μάτι επιδιώκοντας να περάσουμε κοντά στα σημεία και μέσα από τα σφάλματα, αλλά μπορούμε να χαράξουμε την καλύτερη δυνατή καμπύλη χρησιμοποιώντας μαθηματικές μεθόδους*. Αυτό συμβαίνει όταν η αναμενόμενη καμπύλη είναι γνωστής μορφής (π.χ. ευθεία, υπερβολή, ημιτονοειδής, εκθετική κλπ.). Η μέθοδος που περιγράφουμε λέγεται **μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων**, διότι κύρια απαίτηση για την καμπύλη που χαράσσουμε είναι το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων των πειραματικών μας σημείων από την καμπύλη να είναι ελάχιστο.

Θα περιγράψουμε τη μέθοδο **για την περίπτωση της ευθείας**.

Έστω ότι έχουμε σειρά Ν μετρήσεων με αποτελέσματα $x_i$ και $y_i$ και μάλιστα ξέρουμε ότι αν $\delta x$ και $\delta y$ είναι τα σφάλματα των $x_i$ και $y_i$ αντίστοιχα και ότι για όλα τα $x_i$ και $y_i$ ισχύει $\delta x/x_i < <\delta y/y_i$ και ότι το $\delta y$ είναι το ίδιο για όλα τα $y_i$**.

Τότε η αναμενόμενη ευθεία της μορφής

$$y=A+Bx \tag{9.1}$$

μπορεί να προσδιορισθεί από τους συντελεστές $A$ και $B$ που δίνονται από τις σχέσεις:

$$A=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i^2\sum_{i=1}^{N}y_i-\sum_{i=1}^{N}x_i\sum_{i=1}^{N}x_iy_i}{D} \tag{9.2}$$

$$B=\frac{N\sum_{i=1}^{N}x_iy_i-\sum_{i=1}^{N}x_i\sum_{i=1}^{N}y_i}{D} \tag{9.3}$$

όπου

$$D=N\sum_{i=1}^{N}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{N}x\right)^2 \tag{9.4}$$

και τα σφάλματα στα $A$ και $B$:

$$\delta A=\sigma_y\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i^2}{D}} \tag{9.5}$$

$$\delta B=\sigma_y\sqrt{\frac{N}{D}} \tag{9.6}$$

όπου:

* Σήμερα υπάρχουν βέβαια ειδικά προγράμματα υπολογιστούν που μπορούν να βρουν την καμπύλη που προσεγγίζει καλύτερα ένα σύνολο πειραματικών σημείων. Τέτοια προγράμματα είναι απλά στην περίπτωση απλών καμπυλών (ευθεία, εκθετική, παραβολή κ.τ.λ.) και γίνονται πολύπλοκα για άλλες πιο σύνθετες καμπύλες.

** Μερικές φορές στο εκπαιδευτικό εργαστήριο μπορούμε να αγνοήσουμε αυτούς τους όρους.

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - A - Bx_i)^2}{N-2}} \qquad (9.7)$$

Προφανώς το *B* είναι η κλίση της ευθείας ενώ το *A* το σημείο στον άξονα των *y* από το οποίο περνάει η ευθεία μας.

**Παράδειγμα.** Για αέριο σταθερού όγκου μεταβάλλουμε την πίεση και μετρούμε τη θερμοκρασία. Λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα:

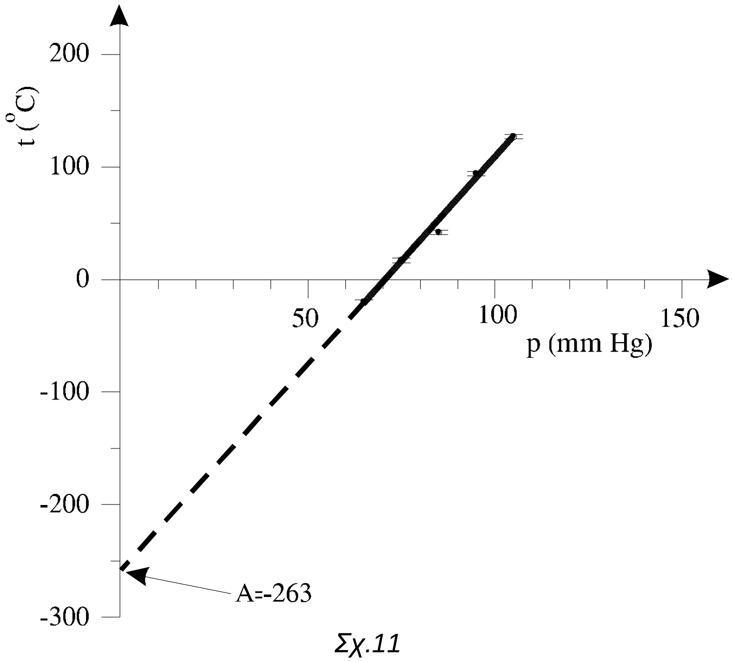
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *p* (mm Hg) | 65 | 75 | 85 | 95 | 105 |
| *t* ($^o$C) | -20 | 17 | 42 | 94 | 127 |

Οι μετρήσεις μας είναι τέτοιες ώστε $\delta p \approx 0$ ενώ $\delta t$=2 $^o$C. Θέλουμε να χαράξουμε σε διάγραμμα την *t=t(p)*. Από τους νόμους των ιδανικών αερίων ξέρουμε ότι *t=A+Bp*, όπου για *p*=0 *A*=–273.15 $^o$C. Θα ελέγξουμε λοιπόν το αποτέλεσμά μας και ταυτόχρονα θα υπολογίσουμε το *B*.

Έχουμε:

$$N\text{=5},\ \sum_{i=1}^{5} t_i = 260,\ \sum_{i=1}^{5} p_i t_i = 25810,\ \sum_{i=1}^{5} p_i = 425,\ \sum_{i=1}^{5} p_i^2 = 37125,\ D = 5000.$$

Από τους τύπους (9.2) – (9.7) λαμβάνουμε: *A*=–263.35, *B*=3.71, $\sigma_t$=6.7≈7, $\delta A$=18, $\delta B$=0.22.




*Σχ.11*

Άρα τελικά:

$$A = (-263 \pm 18)\ ^\circ\text{C},$$
$$B = (3.71 \pm 0.22)\ ^\circ\text{C/mmHg}$$

Όπως βλέπουμε το πειραματικό A βρίσκεται σε καλή συμφωνία με το αναμενόμενο θεωρητικό.

Τώρα πια μπορούμε να χαράξουμε την ευθεία. Αφού βάλουμε στο μιλλιμετρέ χαρτί τα σημεία φέρνουμε την ευθεία με βάση το *A* και την κλίση *B* ( σχ. 11).

## Απόρριψη ορισμένων αποτελεσμάτων

Μερικές φορές όταν μετρούμε επανειλημμένα την ίδια ποσότητα, κάποιο από τα αποτελέσματά μας διαφέρει απ' όλα τα άλλα. Όταν αυτό συμβαίνει ο πειραματικός πρέπει να αποφασίσει αν αυτό είναι συνέπεια κάποιων λαθών στη διαδικασία της μέτρησης, οπότε πρέπει να αγνοηθεί, ή είναι νομοτελειακό αποτέλεσμα που πρέπει να εξεταστεί μαζί μ' όλα τα άλλα. Για παράδειγμα κάνουμε 6 μετρήσεις της περιόδου ενός εκκρεμούς και βρίσκουμε (σε δευτερόλεπτα):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3.8 | 3.5 | 3.9 | 3.9 | 3.4 | 1.8 |

Σ' αυτό το παράδειγμα το 1.8 διαφέρει σημαντικά από τα υπόλοιπα αποτελέσματα και πρέπει να αποφασίσουμε τι θα το κάνουμε.

Θέλουμε να υπογραμμίσουμε εδώ ότι στη θεωρία των σφαλμάτων και των μετρήσεων αποδεικνύεται ότι ένα τέτοιο αποτέλεσμα (αν υποθέσουμε ότι δεν έχουμε κάνει λάθη στην πειραματική διαδικασία) **είναι πιθανό***, παρόλο που αυτή η πιθανότητα είναι μικρή.

Αφού λοιπόν πεισθούμε για την ορθότητα της πειραματικής μας διαδικασίας πρέπει να πάρουμε την τελική απόφαση, η οποία **δεν μπορεί να είναι αυθαίρετη**, διότι θα επιδράσει σημαντικά στο αποτέλεσμά μας.

Για παράδειγμα αν δεν αγνοήσουμε την 6η μέτρηση στα παραπάνω αποτελέσματα θα έχουμε:

$$T = (3.4 \pm 0.3)\ \mathrm{s},$$

ενώ αν την αγνοήσουμε:

$$T = (3.70 \pm 0.10)\ \mathrm{s}.$$

Ένας τρόπος για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα είναι να χρησιμοποιήσουμε το λεγόμενο κριτήριο Chauvenet. Ακολουθούμε λοιπόν τα εξής βήματα:

1. Χρησιμοποιώντας **όλες** τις τιμές (και την «ύποπτη» $x_j$) $x_1$, $x_2$, ..., $x_N$ υπολογίζουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$.
2. Βρίσκουμε την τυπική απόκλιση** $\sigma$ από τον τύπο:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(\bar{x} - x_i)^2}{N-1}}. \qquad (11.1)$$

3. Βρίσκουμε το λόγο της απόλυτης τιμής της διαφοράς της μέσης τιμής από την «ύποπτη» τιμή προς την τυπική απόκλιση $\mu$:

$$\mu = \frac{|\bar{x} - x_j|}{\sigma}. \qquad (11.2)$$

4. Από τον πίνακα του παραρτήματος (σελίδα 33) βρίσκουμε την πιθανότητα $P(<\mu\sigma)$ να έχουμε μέτρηση που απέχει από τη μέση τιμή λιγότερο από την «ύποπτη» που εξετάζουμε.
5. Βρίσκουμε την πιθανότητα $P(\geq\mu\sigma)$ να έχουμε τιμή που να απέχει από τη μέση περισσότερο ή όσο η «ύποπτη» από τη σχέση:

$$P(\geq\mu\sigma) = 1 - P(<\mu\sigma) \qquad (11.3)$$

6. Πολλαπλασιάζουμε το $P(\geq\mu\sigma)$ με τον αριθμό των μετρήσεων $N$ και βρίσκουμε το αποτέλεσμα $u$. Τότε:

   α) Αν $u$<0.5 απορρίπτουμε την «ύποπτη» τιμή, βρίσκουμε νέα μέση τιμή (από $N$–1 μετρήσεις) και το σφάλμα της.

   β) Αν $u$≥0.5 κρατάμε την ύποπτη τιμή και συνεχίζουμε με όλες τις μετρήσεις υπολογίζοντας το σφάλμα για τη μέση τιμή που ήδη έχουμε υπολογίσει.

Στο παράδειγμα λοιπόν που είχαμε στην αρχή του κεφαλαίου υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι όλες οι τιμές μας είναι λογικές. Υπολογίζουμε λοιπόν τη μέση τιμή και βρίσκουμε $\overline{T} = 3.383\ s$. Για την τυπική απόκλιση έχουμε: $\sigma_T = 0.7\ s$.

* Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2 η κανονική κατανομή δίνει πεπερασμένη (αν και μικρή) πιθανότητα να έχουμε αποτελέσματα πολύ μακριά από την πραγματική τιμή.

** Βλ. κεφάλαιο 2.

Τώρα βλέπουμε ότι η τιμή 1.8 s, για την οποία αμφιβάλλουμε, διαφέρει από τη μέση τιμή κατά 1.58 δηλαδή μ=2.3. Μπορούμε τώρα να βρούμε τι πιθανότητα έχει ένα αποτέλεσμά μας να απέχει από τη μέση τιμή περισσότερο από 2 τυπικές αποκλίσεις:

Από το πίνακα του Παραρτήματος βρίσκουμε την $P(<2.3\sigma_T)\approx 0.98$.

Άρα:

$$P(\geq 2.3\sigma_T)=1-0.98=0.02$$

Αυτό σημαίνει ότι αν κάναμε 100 μετρήσεις της περιόδου οι 2 τουλάχιστον θα ήταν το ίδιο "άσχημες" όπως το 1.8 s και δεν θα έπρεπε να τις απορρίψουμε. Εμείς όμως κάναμε 6. Άρα "άσχημες" θα πρέπει να είναι:

$$0.02\times 6=0.12$$

Το κριτήριο του Chauvenet μας λέει ότι αν αυτός ο τελευταίος αριθμός είναι μικρότερος του 0.5 τότε πρέπει να απορρίψουμε την τιμή. Αν απορρίψουμε την τιμή πρέπει να προσδιορίσουμε ξανά την $\overline{T}$ και την $\delta T$. Έτσι για το παράδειγμά μας βρίσκουμε:

$$T=(3.70\pm 0.10)\ s$$

Αν τώρα έχουμε και κάποια άλλη ύποπτη τιμή **δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δεύτερη φορά στην ίδια σειρά μετρήσεων** το κριτήριο του Chauvenet.

**Παράδειγμα.** Φοιτητής μετράει δέκα φορές την ίδια ταχύτητα $\upsilon$ και βρίσκει (σε m/s)

46, 48, 44, 38, 45, 47, 58, 44, 45, 43.

Βλέπει τότε ότι το 58 φαίνεται υπερβολικά μεγάλο. Ελέγχει τη μεθοδολογία του πειράματος του αλλά δεν βρίσκει κάποιο προφανές λάθος. Τότε χρησιμοποιεί το κριτήριο του Chauvenet. Συνυπολογίζοντας προσωρινά και τις 10 μετρήσεις βρίσκει:

$$\bar{x}=45.8 \text{ και } \sigma_x=5.1.$$

Ύποπτη θεωρείται η τιμή $x_7=58$. Τότε βρίσκει:

$$\frac{|x_7-\bar{x}|}{\sigma_x}=\frac{58-45.8}{5.1}=2.4\ ,\ P(\geq 2.4\sigma_x)=1-P(<2.4\sigma_x).$$

Από τον πίνακα του Παραρτήματος βρίσκει $P(<2.4\sigma_x)=0.984$.

Επομένως, $P(\geq 2.4\sigma_x)=1-0.984=0.016$.

Οπότε για 10 μετρήσεις λαμβάνει: $0.016\times 10=0.16<0.5$

Άρα απορρίπτει την τιμή 58 και βρίσκει: $\bar{x}=44.4$ m/s και $\delta x=0.96$ m/s.

Άρα τελικά: $x=(44.4\pm 1.0)$ m/s

# Γενικές οδηγίες

## Η μεθοδολογία του πειράματος

Πριν αρχίσετε την εκτέλεση της άσκησης μελετήστε τα όργανα που θα χρησιμοποιήσετε και προσπαθήστε να βρείτε την πιστότητά τους (το σφάλμα του κατασκευαστή) καθώς και τα πιθανά σφάλματα ανάγνωσης. Σε κάθε βήμα σας στην εκτέλεση του πειράματος σκεφθείτε αν υπάρχουν συστηματικά σφάλματα και πως αυτά μπορούν να εξουδετερωθούν (πειραματικά ή θεωρητικά).

Όπως είπαμε και πιο πάνω τα σφάλματα σε κάθε πείραμα είναι αναπόφευκτα και πολλές φορές η μείωσή τους συνδέεται με τη χρήση πολύπλοκων και ακριβών οργάνων.

Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι κάθε πειραματικός χρησιμοποιώντας τις συσκευές που έχει στη διάθεσή του δεν προσπαθεί να μειώσει όσο το δυνατόν τα σφάλματά του χρησιμοποιώντας διάφορες εμπειρικές μεθόδους και αποφεύγοντας τα λάθη στην εκτέλεση του πειράματος.

Υπάρχουν επίσης ορισμένοι απλοί τρόποι για τη μείωση των σφαλμάτων.

Έτσι, για παράδειγμα, όταν μετρούμε κάποιο μήκος με τη βοήθεια του κανόνα πρέπει να φροντίζουμε ώστε η μια άκρη (συνήθως η αρχή) να συμπίπτει με κάποια ακριβή ένδειξη του κανόνα.

Όταν μεταβάλλουμε κάποιο μέγεθος (π.χ. την ένταση του ρεύματος) για να μετρήσουμε κάποιο άλλο (π.χ. την τάση) πρέπει να φροντίζουμε ώστε το αμπερόμετρό μας να δείχνει ακριβείς ενδείξεις κλπ.

Υπάρχουν κι άλλοι τρόποι που όμως καλύτερο θα είναι να συζητηθούν στα συγκεκριμένα πειράματα και να αφομοιωθούν με βάση την πείρα του κάθε φοιτητή.

## Πολλαπλά σφάλματα

Συνήθως στη διαδικασία μιας μέτρησης δεν υπεισέρχεται μόνο ένα σφάλμα, αλλά πολλά. Για παράδειγμα αν μετρούμε πολλές φορές το ίδιο μέγεθος έχουμε, κυρίως, τριών ειδών σφάλματα:

α) Σφάλμα κατασκευαστή. β) Σφάλμα ανάγνωσης. γ) Σφάλμα μέσης τιμής.

Σ' αυτή την περίπτωση γεννιέται το ερώτημα ποιο πρέπει εμείς να θεωρήσουμε σαν σφάλμα της μέτρησης; Πριν απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα ας δούμε ένα παράδειγμα.

Έστω ότι μετράμε με μέτρο ένα μήκος L πέντε φορές και βρίσκουμε τις τιμές (σε mm):

324 323 324 322 324 323 323 323 324 322 323 323

Για τη μέση τιμή έχουμε $\overline{L} = 323.166....$ mm, ενώ για το σφάλμα της μέσης τιμής $\delta L$=0.21 mm.

Μπορούμε τώρα να πούμε ότι το αποτέλεσμά μας είναι $L$=323.17±0.21 mm; Όμως δεν έχουμε λάβει ακόμη υπόψη τόσο το σφάλμα του κατασκευαστή, όσο και το σφάλμα ανάγνωσης. Ας υποθέσουμε ότι το σφάλμα του κατασκευαστή είναι της τάξης του 0.1 mm. Όσον αφορά στο σφάλμα ανάγνωσης ας υποθέσουμε ότι οι συνθήκες μέτρησης είναι τέτοιες που το σφάλμα ανάγνωσης είναι ίσο με την ακρίβεια του οργάνου μας, στη συγκεκριμένη περίπτωση του μέτρου. Συνήθως ένα καλό μέτρο έχει ακρίβεια 0.5 mm (αυτό οφείλεται στη χαραγή των υποδιαιρέσεων, στο πάχος και στην ευκρίνειά τους).

Επομένως τελικά έχουμε τρία σφάλματα: α) μέσης τιμής 0.21 mm, β) κατασκευαστή 0.1 mm και γ) ανάγνωσης (ακρίβεια) 0.5 mm.

Είναι κατανοητό πως το σφάλμα του κατασκευαστή δεν παίζει ρόλο διότι είναι πολύ μικρό. Όσο για το σφάλμα της μέσης τιμής, νομίζουμε πως είναι προφανές, ότι αφού είναι μικρότερο από το σφάλμα ανάγνωσης (την ακρίβεια του οργάνου) δεν μπορούμε να το κρατήσουμε διότι αυτό δεν μπορούμε με τίποτε να το βελτιώσουμε. Φαντασθείτε π.χ. τι θα λέγαμε αν όλες οι τιμές που βρήκαμε πιο πάνω ήταν 323 mm, αποτέλεσμα πολύ συχνό στη μέτρηση μήκους. Ήταν δυνατόν να πούμε ότι το σφάλμα είναι μηδέν;!!! Φυσικά όχι. Άρα και για το συγκεκριμένο παράδειγμά μας το αποτέλεσμα είναι να κρατήσουμε το μεγαλύτερο σφάλμα, στην προκειμένη περίπτωση το σφάλμα ανάγνωσης και να γράψουμε L=323.2±0.5 mm.

Επομένως ο γενικός κανόνας είναι πως **στην περίπτωση που στην ίδια μέτρηση έχουμε πολλά σφάλματα κρατάμε πάντα το μεγαλύτερο*.**

## Επεξεργασία των αποτελεσμάτων

Πάντα βρείτε τα σφάλματα σε κάθε στιγμή χωρίς γα ξεχνάτε την στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων σας. Μην ξεχνάτε ότι κάθε τελικό αποτέλεσμα πρέπει γα συνοδεύεται από το σφάλμα του. Καλό είναι να υπολογίσετε και το σχετικό σφάλμα που σας δίνει τη δυνατότητα να εκτιμήσετε την ακρίβεια της μεθόδου σας.

Φτιάχνετε πάντα πίνακες. Βοηθούν καλύτερα και να δουλέψετε με τις μετρήσεις σας και να δείτε τις διάφορες νομοτέλειες που εμφανίζονται στα αποτελέσματά σας και να χαράξετε με βάση τα αποτελέσματα καμπύλες. Συνήθως

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | *B* | **f(A,B)** | $x_i$ | $\bar{x}$ | $(\bar{x}-x_i)^2$ | *δx* |

στους πίνακες στις πρώτες στήλες ( π.χ. στην 1 και 2) βάζουμε τις ποσότητες που μετρούμε, μετά (π.χ. στην 3) κάποιες ενδιάμεσες συναρτήσεις των *A* και *B* που θα μας βοηθήσουν στον υπολογισμό της *x* (Αν π.χ. *x* = *A*ln*B* στη στήλη 3 γράφουμε τη ln*B*) χωρίς αυτό βέβαια να είναι απαραίτητο. Στην επόμενη στήλη (π.χ. στην 4) γράφουν τις τιμές της ζητούμενης ποσότητας *x* που βρίσκουν από τους υπολογισμούς και αμέσως μετά ( στη στήλη 6) τη μέση τιμή $\bar{x}$ αν αυτή υπάρχει.

Στους πίνακες συνήθως γράφουμε και τα σφάλματα των τιμών που υπολογίζουμε. Έτσι στη στήλη 7 π.χ. έχουμε γράψει τις τιμές $(\bar{x}-x_i)^2$ που θα μας βοηθήσουν να υπολογίσουμε το σφάλμα της μέσης τιμής *δx* που το γράφουμε στη στήλη 8.

Φυσικά σε διαφορετικές περιπτώσεις αλλάζει και ο τρόπος που ταξινομούμε τις στήλες.

## Σχεδιασμός γραφικών παραστάσεων

α) **Όλες** οι γραφικές παραστάσεις γίνονται **πάντα σε χαρτί μιλλιμετρέ.**

β)Με την κατάλληλη επιλογή της αρχής και της κατάλληλης κλίμακας των αξόνων των συντεταγμένων φροντίζουμε ώστε η καμπύλη μας να πιάνει όλο το χώρο του διαγράμματος

γ) Βαθμολογώντας τους άξονες των συντεταγμένων δεν αναγράφουμε όλες τις υποδιαιρέσεις τους αλλά μόνο κάποιες βασικές υποδιαιρέσεις σε ίσα διαστήματα (βλ. σχ. 9).

δ) Στους άξονες πάντα γράφουμε τα μεγέθη και τις μονάδες τους.

---

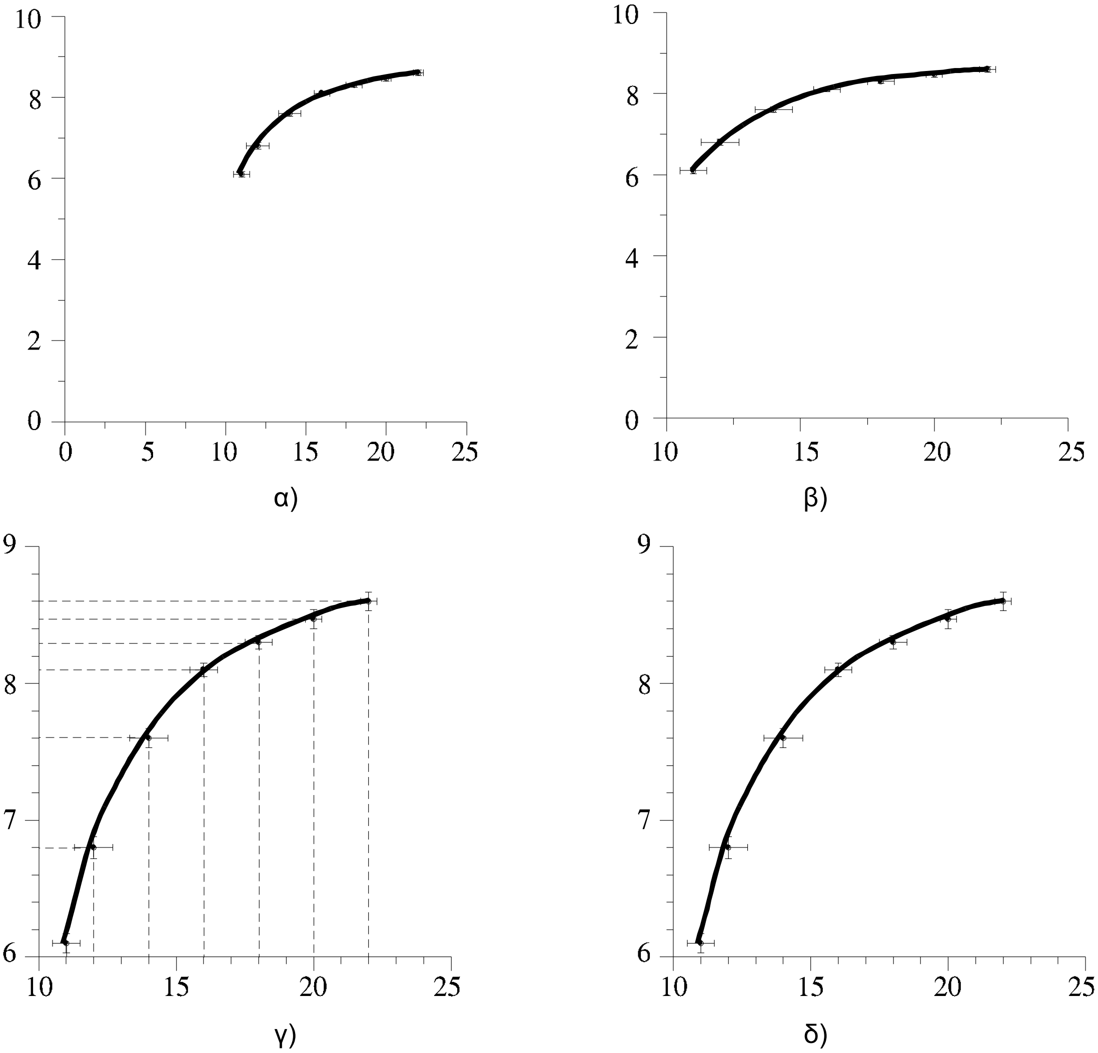
* Γενικά πάντως αν στη μέτρηση μιας ποσότητας x υπεισέρχονται τα σφάλματα $\delta x_1$, $\delta x_2$, $\delta x_3$,... το τελικό σφάλμα είναι $\delta x = \sqrt{(\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2 + (\delta x_3)^2 + \ldots}$. Είναι όμως εύκολα κατανοητό πως αν π.χ. $\delta x_1 > \delta x_2$ και $\delta x_1 > \delta x_3$ και θυμηθούμε πως στο σφάλμα αφήνουμε σχεδόν πάντα ένα σημαντικό ψηφίο θα ισχύει $\delta x \approx \delta x_1$.

ε) Ποτέ δεν γράφουμε στους άξονες τις τιμές των πειραματικών σημείων ούτε ενώνουμε με γραμμές τα σημεία αυτά με τους άξονες.

στ) **Σε κάθε καμπύλη** και εφόσον σας το επιτρέπει η κλίμακα των αξόνων σας **για κάθε πειραματικό σημείο** χαράξτε τα σφάλματα.

Στο σχ. 12 σωστή είναι η καμπύλη δ) και όχι οι α), β) και γ) παρόλο που και οι 4 απεικονίζουν τα ίδια σημεία.

Τέλος πρέπει να πούμε, πως οι γραφικές παραστάσεις δεν πρέπει να είναι ούτε μικροσκοπικές, ούτε βέβαια «σεντόνια». Κάθε γραφική παράσταση πρέπει να έχει περίπου το μέγεθος μισής σελίδας Α4.




Σχ.12

Πρέπει επίσης να τονίσουμε πως αν σχεδιάσουμε μια γραφική παράσταση και πρέπει να εργαστούμε μ' αυτή (για παράδειγμα να υπολογίσουμε σε κάποια σημεία την κλίση της) θεωρούμε σαν δεδομένο **την καμπύλη και όλα τα σημεία της** και όχι τα πειραματικά σημεία με τη βοήθεια των οποίων χαράξαμε την καμπύλη.

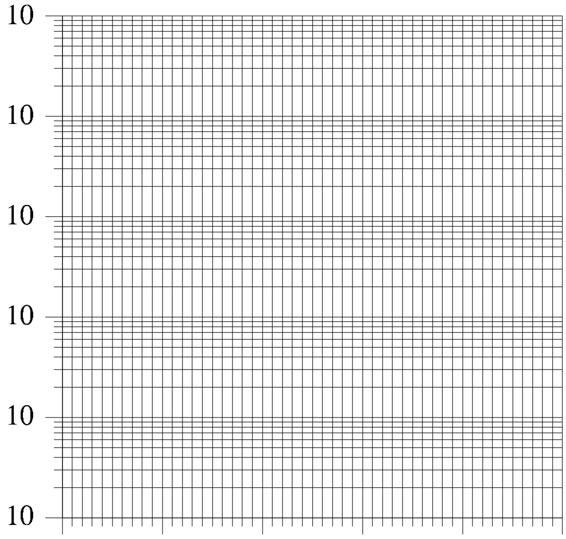
## Το χιλιοστομετρικό χαρτί (μιλλιμετρέ)

Όπως αναφέραμε παραπάνω όλα τα σχήματα πρέπει να γίνονται σε χαρτί μιλλιμετρέ, το οποίο υποθέτουμε ότι ξέρει ο αναγνώστης.

Εκτός όμως από το συνηθισμένο χαρτί μιλλιμετρέ υπάρχουν ακόμη δύο είδη: Το ημιλογαριθμικό και το λογαριθμικό. Στο πρώτο από τα δυο θα αναφερθούμε παρακάτω.

Το ημιλογαριθμικό χαρτί παριστάνεται στο Σχ.13. Όπως βλέπουμε σ' αυτό η οριζόντια κλίμακα του χαρτιού είναι κανονική, ενώ η κατακόρυφη όχι. Μια πιο προσεκτική μελέτη των αποστάσεων μας δείχνει ότι η κατακόρυφη κλίμακα αντιστοιχεί στους δεκαδικούς λογαρίθμους των αριθμών.

Όπως βλέπουμε και στο Σχ. 13 η κατακόρυφη κλίμακα παρουσιάζει μια περιοδικότητα και οι μεγάλες υποδιαιρέσεις της έχουν δίπλα τον αριθμό 10*.




Σχ.13

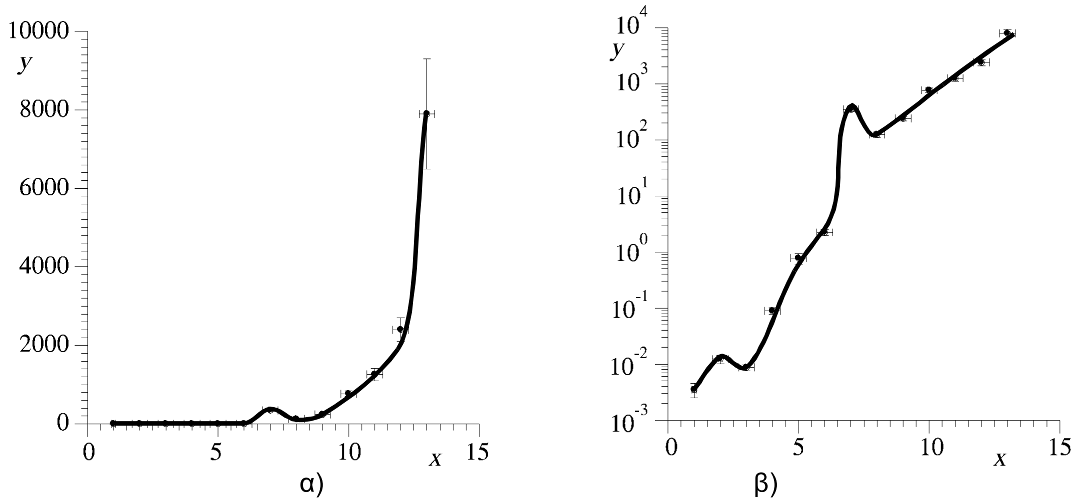
Οι μεγάλες υποδιαιρέσεις αντιστοιχούν σε δυνάμεις του 10, ενώ οι μικρές σε πολλαπλάσιά τους. Αυτό όμως θα γίνει σαφέστερο στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Χρησιμοποιούμε αυτό το χαρτί όταν οι μετρήσεις (τα αποτελέσματα) που αντιστοιχούν στον άξονα των *y* παρουσιάζουν μεγάλο εύρος, τέτοιο που η χρησιμοποίηση κανονικού μιλλιμετρέ χαρτιού μας κάνει να χάνουμε λεπτομέρειες από τη γραφική παράσταση. Για παράδειγμα αν το εύρος των τιμών είναι μεταξύ 1 και 100000.

Σαν παράδειγμα, με βάση τον πίνακα που ακολουθεί για τις τιμές *x, y, δx* και *δy* σχεδιάσαμε τις γραφικές παραστάσεις σε κανονικό χαρτί (σχ. 14α) και σε ημιλογαριθμικό χαρτί (σχ. 14β).

| x | 1.00 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 5.0 | 6.0 | 7.0 | 8.0 | 9.0 | 10.0 | 11.0 | 12.0 | 13.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0.0035 | 0.0123 | 0.0087 | 0.089 | 0.77 | 2.23 | 34,6 | 124 | 240 | 770 | 1260 | 2400 | 7900 |
| δx | 0.08 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 |
| δy | 0.001 | 0.0021 | 0.0011 | 0.012 | 0.16 | 0.26 | 28 | 13 | 21 | 70 | 160 | 300 | 1400 |

Το μέγεθος της γραφικής μας παράστασης, όταν χρησιμοποιούμε ημιλογαριθμικό χαρτί δεν μπορούμε πλέον να το καθορίσουμε μόνοι μας, αλλά μας το καθορίζει το ίδιο το χαρτί.




α) β)

Σχ.14

**Παρατήρηση.** Πρέπει να έχουμε υπόψη μας πως στο ημιλογαριθμικό χαρτί ο σχεδιασμός

* Σε κάποιες μάρκες ημιλογαριθμικού χαρτιού αντί για 10 έχουμε το 1.

των σφαλμάτων διαφέρει λίγο από τον σχεδιασμό τους στο κανονικό χαρτί, παρόλο που αυτό δεν φαίνεται καλά στο Σχ.14β. Επειδή όπως είπαμε οι γραμμούλες των σφαλμάτων αντιστοιχούν στο μέγεθός τους σύμφωνα με την κλίμακα των αξόνων και επειδή στο ημιλογαριθμικό χαρτί ο κατακόρυφος άξονας δεν έχει ισαπέχουσες μονάδες, προκύπτει εύκολα ότι η κατακόρυφη γραμμή του σφάλματος που είναι πάνω από το σημείο θα είναι πάντα μικρότερη από την κατακόρυφη γραμμή που είναι κάτω από το σημείο. Για το σφάλμα που αντιστοιχεί στην οριζόντια κλίμακα δεν αλλάζει τίποτε. Σαν παράδειγμα σας προτείνουμε να χαράξετε σε ημιλογαριθμικό χαρτί τα σημεία $x_1 = 1.0 \pm 0.3$, $y_1 = 4.3 \pm 2.1$ και $x_2 = 3.0 \pm 0.5$, $y_1 = 130 \pm 40$.

## Η κλίση μιας καμπύλης

Πολλές φορές από μια καμπύλη χρειάζεται να προσδιορίσουμε κάποια μεγέθη και συνήθως την κλίση της. Εδώ αναφερόμαστε σε πειραματική καμπύλη, όταν την κλίση, δηλαδή την παράγωγο, δεν μπορούμε να την υπολογίσουμε αναλυτικά. Σ' αυτή την περίπτωση όσον αφορά τον ορισμό ότι «κλίση είναι η εφαπτόμενη της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτόμενη στο σημείο στο οποίο αναζητούμε την κλίση, με τον οριζόντιο άξονα», δεν πρέπει να τον κατανοούμε με την έννοια, ότι πρέπει να μετρήσουμε με μοιρογνωμόνιο κάποια γωνία, αλλά με την έννοια του ορισμού της εφαπτομένης. Δηλαδή φέρουμε με το μάτι την ευθεία, η οποία εφάπτεται στο σημείο το οποίο μας ενδιαφέρει. Στη συνέχεια σχηματίζουμε ορθογώνιο τρίγωνο, υποτείνουσα του οποίου είναι η εφαπτόμενη ευθεία και οι κάθετες πλευρές του είναι παράλληλες προς τους αντίστοιχους άξονες του συστήματος συντεταγμένων. Τότε η κλίση δίνεται από τον τύπο:

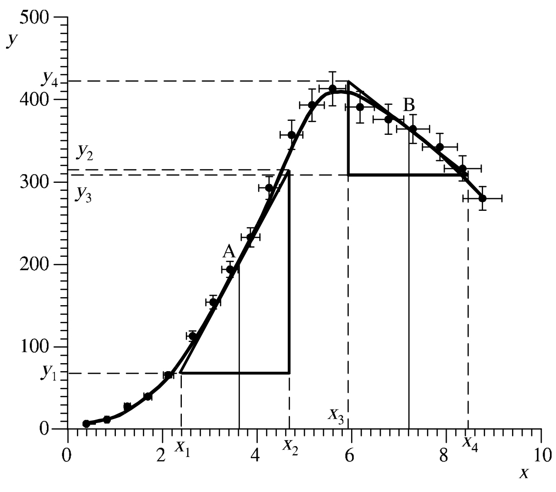
$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

όπου $\Delta x$ το μήκος της πλευράς, που είναι παράλληλη στον άξονα $x$ και $\Delta y$ το μήκος της πλευράς που είναι παράλληλη στον άξονα $y$. Τα μήκη ορίζονται σύμφωνα με τις κλίμακες που χρησιμοποιούμε. Το πρόσημο της κλίσης ορίζεται κατά τα γνωστά, ή βγαίνει από τον τύπο αν θέσουμε $\Delta x = x_2 - x_1$ ($x_2 > x_1$) και $\Delta y = y_2 - y_1$.

**Παράδειγμα.** Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την κλίση της καμπύλης του σχ. 15 στα σημεία A (x=3.6) και B (x=7.2).

Από το Σχ.15 έχουμε: $x_1 \approx 2.4$, $x_2 \approx 4.7$, $x_3 \approx 4.95$, $x_4 \approx 8.5$, $y_1 \approx 70$, $y_2 \approx 315$, $y_3 \approx 310$, $y_4 \approx 423$.

Επομένως: $K_A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{245}{2.3} \approx 106.5$ και $K_B = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{-113}{3.55} \approx -31.8$




Σχ.15

**Παρατήρηση**. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι στη Φυσική η κλίση δεν είναι κάποια αφηρημένη γεωμετρική έννοια, αλλά φυσικό μέγεθος και, επομένως, έχει διαστάσεις και τις αντίστοιχες μονάδες. Π.χ. η κλίση της καμπύλης s(t) (s διάστημα [m], t χρόνος [s]) μας δίνει τη στιγμιαία ταχύτητα [m/s].

## Συνεκτίμηση σφαλμάτων διαφορετικών μετρήσεων

Σε μερικές περιπτώσεις **μετρούμε το ίδιο μέγεθος με διαφορετική μεθοδολογία** και σε κάθε μέτρηση καταλήγουμε σε διαφορετικό αποτέλεσμα με διαφορετικό σφάλμα. Σαν παράδειγμα αναφέρουμε μια άσκηση του εργαστηρίου στη διάρκεια της οποίας υπολογίζετε με **διαφορετικές μεθόδους** την επιτάχυνση της βαρύτητας και καταλήγετε τόσο σε διαφορετικά $g$ όσο και σε διαφορετικά $\delta g$. Αν υποθέσουμε ότι όλες οι μέθοδοι έχουν δώσει «σωστό» αποτέλεσμα, πιθανόν να θέλουμε να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα για την τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τους τύπους που αναφέρονται πιο κάτω.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε τα αποτελέσματα $x_1$, $x_2$, $x_3$,..., $x_N$, με τα αντίστοιχα σφάλματα $\delta x_1$, $\delta x_2$, $\delta x_3$,..., $\delta x_N$. Τότε το αποτέλεσμα που συνδυάζει όλα τα παραπάνω δίνεται από τη σχέση:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i} \qquad (11.1)$$

με σφάλμα:

$$\delta x = \sqrt{1/\sum_{i=1}^{N} w_i} \qquad (11.2)$$

όπου:

$$w_i = 1/(\delta x_i)^2 \qquad (11.3)$$

**Παράδειγμα** Έστω ότι για το μέγεθος που μετρήσαμε βρήκαμε τα εξής 5 αποτελέσματα με τα αντίστοιχα σφάλματά τους:

$$11\pm1 \quad 12\pm1 \quad 10\pm3 \quad 13\pm2 \quad 9\pm2$$

Από εδώ βρίσκουμε:

$$w_1=1,\ w_2=1,\ w_3=1/9,\ w_4=1/4,\ w_5=1/4,\ x=11.34,\ \delta x=0.62.$$

Επομένως τελικά:

$$x=11.3\pm0.6.$$

# Ασκήσεις

1. Μετρώντας το μήκος $L$ και το πλάτος $d$ ορθογωνίου παραλληλογράμμου βρίσκουμε τις εξής τιμές ( σε mm):

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | 24.25 | 24.26 | 24.22 | 24.28 | 24.24 | 24.25 | 24.22 | 24.26 | 24.23 | 24.24 |
| **d** | 50.36 | 50.35 | 50.41 | 50.37 | 50.36 | 50.32 | 50.39 | 50.38 | 50.36 | 50.38 |

Υπολογίστε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου και το σφάλμα με 2 τρόπους:

α) Από τα $L_i$, $d_i$ υπολογίστε τα $\overline{L}, \overline{d}$ και $\delta L$, και $\delta d$ και από εδώ το $S$ και το $\delta S$.

β) Από τα $L_i$ και $d_i$ υπολογίστε τα $S_i$ και από εδώ το $\overline{S}$ και το $\delta S$.

2. Στα παρακάτω παραδείγματα το Ζ είναι συνάρτηση των μεγεθών $A$, $B$ κ.τ.λ. που έχουν μετρηθεί ανεξάρτητα. Υπολογίστε το $Z$ και το $\delta Z$ από τις γνωστές τιμές των $A \pm \delta A$, $B \pm \delta B$, ...

**α)** $Z = A^2, \quad A = 25 \pm 1$ **β)** $Z = A - 2B, \quad A = 100 \pm 3, B = 45 \pm 2,$

**γ)** $Z = \dfrac{A(C^2 + D^{3/2})}{B}, A = 0.100 \pm 0.003, B = 1.00 \pm 0.05, C = 50.0 \pm 0.5, D = 100 \pm 8$

**δ)** $Z = A \ln B, A = 10.00 \pm 0.06, B = 100 \pm 2$ **ε)** $Z = 1 - \dfrac{1}{A}, A = 50 \pm 2$

3. Η μάζα παραλληλεπίπεδης μεταλλικής ομογενούς ράβδου με πλευρές $a$, $b$ και $c$ είναι $M$. Είναι γνωστό ότι η ροπή αδράνειας $I$ ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο της έδρας $ab$ και είναι κάθετος σ' αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$

οι μετρήσεις μας έδωσαν τα εξής αποτελέσματα:

$M$=(135.00±0.10) gr, $a$=(80.0±1.0) mm, $b$=(10.0±1.0) mm, $c$=(20.00±0.10) mm.

Υπολογίστε το σχετικό σφάλμα (σε ποσοστά) α) της πυκνότητας του μετάλλου και β) της ροπής αδράνειας του παραλληλεπιπέδου.

4. Αν ξέρουμε ότι $y=a^2/b$ από τον πίνακα σχεδιάστε την καμπύλη $y=f(a)$ και υπολογίστε την κλίση της στα σημεία α) $a_1 = 7$ και β) $a_2 = 9$

| a | δa | b | δb |
|---|---|---|---|
| 4.30 | 0.05 | 1.730 | 0.010 |
| 5.20 | 0.07 | 2.030 | 0.010 |
| 5.80 | 0.08 | 2.040 | 0.010 |
| 6.40 | 0.10 | 2.160 | 0.020 |
| 7.10 | 0.10 | 2.23 | 0.03 |
| 7.60 | 0.10 | 2.38 | 0.03 |
| 8.20 | 0.10 | 2.62 | 0.04 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9.30 | 0.10 | 3.51 | 0.05 |
| 9.60 | 0.10 | 3.88 | 0.08 |
| 10.10 | 0.20 | 4.70 | 0.10 |

5. Για να προσδιορίσει τη σταθερά ελατηρίου $k$ φοιτητής κρεμάει στο άκρο του διάφορες μάζες m και μετράει το μήκος του L. Τα αποτελέσματά του είναι:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ (gr) | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
| $L$ (cm) | 5.1 | 5.5 | 5.9 | 6.8 | 7.4 | 7.5 | 8.6 | 9.4 |

Επειδή ξέρει ότι $mg=k(L–L_0)$ όπου $L_0$ το μήκος του ελατηρίου χωρίς βάρος τότε τα αποτελέσματα του πρέπει να βρίσκονται στην ευθεία $L= L_0+(g/k)m$. Αν ξέρει ότι $\delta L\approx 0.10$ cm και ότι το $\delta m$ είναι αμελητέο βρείτε την ευθεία με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και υπολογίστε τα $L_0$, $k$, $\delta L_0$, $\delta k$.Είναι γνωστό πως $g$=9.81 m/s$^2$.

6. Ένας φοιτητής μετράει μια διαφορά δυναμικού $U$ δέκα Φορές και βρίσκει (σε Volt):

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.86 | 0.83 | 0.87 | 0.84 | 0.82 | 0.95 | 0.83 | 0.85 | 0.89 | 0.88 |

α) Υπολογίστε το $\overline{U}$ και το $\delta U$. β) Αν χρησιμοποιήσει το κριτήριο Chauvenet για την τιμή 0.95 V πρέπει να την απορρίψει ή όχι; Αν ναι ποια θα είναι τα καινούρια $\overline{U}$ και $\delta U$;

7. Ένας φοιτητής, κάνει 14 μετρήσεις της περιόδου μαθηματικού εκκρεμούς και βρίσκει (σε s)

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 3 | 9 | 3 | 6 | 9 | 8 | 7 | 8 | 12 | 5 | 9 | 9 | 3 |

Το αποτέλεσμα 12 του φαίνεται λαθεμένο. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Chauvenet πρέπει να το απορρίψει;

8. Με τέσσερις **διαφορετικούς τρόπους** υπολογίζουμε ένα μέγεθος $x$ και βρίσκουμε:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.4±0.5 | 1.20±0.20 | 1.00±0.25 | 1.30±0.20 |

Υπολογίστε την τιμή του $x$ και το σφάλμα της $\delta x$ που συνδυάζει τα παραπάνω αποτελέσματα.

# Παράρτημα

**Πίνακας[*] των τιμών $P(<\mu\sigma)$[**] σε %.**

| $\mu$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | 0.00 | 0.80 | 1.60 | 2.39 | 3.19 | 3.99 | 4.78 | 5.58 | 6.38 | 7.17 |
| **0.1** | 7.97 | 8.76 | 9.55 | 10.34 | 11.13 | 11.92 | 12.71 | 13.50 | 14.28 | 15.07 |
| **0.2** | 15.85 | 16.63 | 17.41 | 18.19 | 18.97 | 19.74 | 20.51 | 21.28 | 22.05 | 22.82 |
| **0.3** | 23.58 | 23.34 | 25.10 | 25.86 | 26.61 | 27.37 | 28.12 | 28.86 | 29.61 | 30.35 |
| **0.4** | 31.08 | 31.82 | 32.55 | 33.28 | 34.01 | 34.73 | 35.45 | 36.16 | 36.88 | 37.59 |
| **0.5** | 38.29 | 38.99 | 39.69 | 40.39 | 41.08 | 41.77 | 42.45 | 43.13 | 43.81 | 44.48 |
| **0.6** | 45.15 | 45.81 | 46.47 | 47.13 | 47.78 | 48.43 | 49.07 | 49.71 | 50.35 | 50.98 |
| **0.7** | 51.61 | 52.23 | 52.85 | 53.46 | 54.07 | 54.67 | 55.27 | 55.87 | 56.46 | 57.05 |
| **0.8** | 57.63 | 58.21 | 58.78 | 59.35 | 59.91 | 60.47 | 61.02 | 61.57 | 62.11 | 62.65 |
| **0.9** | 63.19 | 63.72 | 64.24 | 64.76 | 65.28 | 65.79 | 66.29 | 66.80 | 67.29 | 67.78 |
| **1.0** | 68.27 | 68.57 | 69.23 | 69.70 | 70.17 | 70.63 | 71.09 | 71.54 | 71.99 | 72.43 |
| **1.1** | 72.87 | 73.30 | 73.73 | 74.15 | 74.57 | 74.99 | 75.40 | 75.80 | 76.20 | 76.60 |
| **1.2** | 76.99 | 77.37 | 77.75 | 78.13 | 78.50 | 78.87 | 79.23 | 79.59 | 79.95 | 80.29 |
| **1.3** | 80.64 | 80.98 | 81.32 | 81.65 | 81.98 | 82.30 | 82.62 | 82.93 | 83.24 | 83.55 |
| **1.4** | 83.85 | 84.15 | 84.44 | 84.73 | 85.01 | 85.29 | 85.57 | 85.84 | 86.11 | 86.38 |
| **1.5** | 86.64 | 86.90 | 87.15 | 87.40 | 87.64 | 87.89 | 88.12 | 88.36 | 88.59 | 88.82 |
| **1.6** | 89.04 | 89.26 | 89.48 | 89.69 | 89.90 | 90.11 | 90.31 | 90.51 | 90.70 | 90.90 |
| **1.7** | 91.09 | 91.27 | 91.46 | 91.64 | 91.81 | 91.99 | 92.16 | 92.33 | 92.49 | 92.65 |
| **1.8** | 92.81 | 92.97 | 93.12 | 93.28 | 93.42 | 93.57 | 93.71 | 93.85 | 93.99 | 94.12 |
| **1.9** | 94.26 | 94.39 | 94.51 | 94.64 | 94.76 | 94.88 | 95.00 | 95.12 | 95.23 | 95.34 |
| **2.0** | 95.45 | 95.56 | 95.66 | 95.76 | 95.86 | 95.96 | 96.06 | 96.15 | 96.25 | 96.34 |
| **2.1** | 96.43 | 96.51 | 96.60 | 96.68 | 96.76 | 96.84 | 96.92 | 97.00 | 97.07 | 97.15 |
| **2.2** | 97.22 | 97.29 | 97.36 | 97.43 | 97.49 | 97.56 | 97.62 | 97.68 | 97.74 | 97.80 |
| **2.3** | 97.86 | 97.91 | 97.97 | 98.02 | 98.07 | 98.12 | 98.17 | 98.22 | 98.27 | 98.32 |
| **2.4** | 98.36 | 98.40 | 98.45 | 98.49 | 98.53 | 98.57 | 98.61 | 98.65 | 98.69 | 98.72 |
| **2.5** | 98.76 | 98.79 | 98.83 | 98.86 | 98.89 | 98.92 | 98.95 | 98.98 | 99.01 | 99.04 |
| **2.6** | 99.07 | 99.09 | 99.12 | 99.15 | 99.17 | 99.20 | 99.22 | 99.24 | 99.26 | 99.29 |
| **2.7** | 99.31 | 99.33 | 99.35 | 99.37 | 99.39 | 99.40 | 99.42 | 99.44 | 99.46 | 99.47 |
| **2.8** | 99.49 | 99.50 | 99.52 | 99.53 | 99.55 | 99.56 | 99.58 | 99.59 | 99.60 | 99.61 |
| **2.9** | 99.63 | 99.64 | 99.65 | 99.66 | 99.67 | 99.68 | 99.69 | 99.70 | 99.71 | 99.72 |
| **3.0** | 99.73 | | | | | | | | | |
| **3.5** | 99.95 | | | | | | | | | |
| **4.0** | 99.994 | | | | | | | | | |
| **4.5** | 99.9993 | | | | | | | | | |
| **5.0** | 99.99994 | | | | | | | | | |

Στον πίνακα η πρώτη στήλη και η πρώτη σειρά (έντονα σημειωμένες) χρησιμεύουν για να βρούμε το $\mu$. Η πρώτη στήλη αποδίδει μονάδες και δέκατα, ενώ η πρώτη σειρά τα εκατοστά.

Οι υπόλοιπες τιμές (εκτυπωμένες με κανονικά γράμματα) αποδίδουν τις τιμές του $P(<\mu\sigma)$.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι θέλετε να βρείτε την τιμή του $P(<\mu\sigma)$ για $\mu$=1.64. Κάνετε το εξής: Από την πρώτη στήλη βρίσκετε τη γραμμή που αντιστοιχεί στο 1.6. Από την πρώτη γραμμή βρίσκετε

[*] **Δείτε** στην επόμενη σελίδα πως χρησιμοποιείται ο Πίνακας αυτός.

[**] Οι τιμές του πίνακα είναι οι τιμές του ολοκληρώματος $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\mu\sigma}^{\mu\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx$ , το οποίο δεν μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά.

τη στήλη που αντιστοιχεί στο 0.04 (1.6+0.04=1.64). Η τομή των δύο που είναι ο αριθμός 89.90 αποδίδει $P(<1.64\sigma)$= 89.90%=0.8990.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκετε π.χ., ότι για $\mu$=2.18 $P(<2.18\sigma)$= 97.07%=0.9707, ενώ για $\mu$=1.00 λαμβάνετε $P(<1.00\sigma)$= 68.27%=0.6827.

Αν τώρα θέλετε να βρείτε το $P(<\mu\sigma)$ π.χ. για $\mu$=1.234 εργάζεσθε ως εξής:

Βρίσκετε ότι για $\mu_1$=1.23, $P(<1.23\sigma)$=78.13%=0.7813, ενώ για $\mu_2$=1.24, $P(<1.24\sigma)$= 78.50%=0.7850. Επομένως $\Delta P=P(<1.24\sigma)-P(<1.23\sigma)$= 0.0037. Τότε από την απλή μέθοδο των τριών λαμβάνετε ότι:

$P(<1.234\sigma)= P(<1.23\mu\sigma)+[(\mu-\mu_1)/(\mu_2-\mu_1)]\cdot \Delta P$ =0.7813+0.4·0.0037≈0.7828.

Για $\mu$>3.0 οι διαφορές στο $P(<\mu\sigma)$ είναι πολύ μικρές και έτσι δίνουμε τις τιμές αυξάνοντας το $\mu$ κατά 0.5. Αν μας ενδιαφέρει μια ενδιάμεση τιμή εργαζόμαστε ακριβώς κατά τον ίδιο τρόπο, όπως στο τελευταίο παράδειγμα.

## Απαντήσεις ασκήσεων

1. α) $S$=(1221.2±0.4) mm$^2$, β) $S$=(1221.18±0.28) mm$^2$
2. α) $Z$=630±50, β) $Z$ =10±5, γ) $Z$ =350±30, δ) $Z$ =46.1±0.3, ε) $Z$ =0.9800±0.0008
3. α) $\delta\rho/\rho$=10.08%, β) $\delta L/L$=2.5%
4. $a_1$=7 → $K$≈4.5, $a_2$=9 → $K$≈–1.55, όπου $K$ η κλίση
5. $L_0$=(3.70±0.20) cm, $k$=(161±11) N/m
6. α) $U$=(0.862±0.012) V, β) $U$=(0.852±0.008) V
7. ΟΧΙ
8. $x$=1.20±0.12

## Εργ.Φυσικής Τμ. Γεωλογίας (2017-2018)

.

### Τμήματα (Ημέρα και Ώρα)

| | |
|---|---|
| Α | Τετάρτη 15:00-17:00 |
| Β | Πέμπτη 12:00-14:00 |
| Γ | Πέμπτη 14:00-16:00 |
| Δ | |
| | |

### Σειρά Εκτελέσεως Ασκήσεων

Η σειρά ορίζεται από τους διδάσκοντες.

| Τμήμα | Α κύκλος | | | | Β κύκλος | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| . | | | | | | | | |

### Διδάσκων και στοιχεία επικοινωνίας

| | |
|---|---|
| | |
| | |
| | |

### Στοιχεία κατόχου του φυλλαδίου

| | |
|---|---|
| Ονοματεπώνυμο φοιτ.: | |
| Αριθμός Μητρώου: | |
| e-mail: | |